

UNIVERSIDAD PRIVADA DE TACNA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



TESIS

**“ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS NUMÉRICOS
PARA OBTENER LA RESPUESTA DINÁMICA DE
ESTRUCTURAS, TACNA 2021”**

PARA OPTAR:

TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO CIVIL

PRESENTADO POR:

Bach. FERNANDO HUANCAPAZA ZEA

TACNA – PERÚ

2021

UNIVERSIDAD PRIVADA DE TACNA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL

TESIS

**“ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS NUMÉRICOS
PARA OBTENER LA RESPUESTA DINÁMICA DE
ESTRUCTURAS, TACNA 2021”**

**Tesis sustentada y aprobada el 14 de noviembre de 2021; estando el
jurado calificador integrado por:**

PRESIDENTE: Mtra. DINA MARLENE COTRADO FLORES

SECRETARIO: Mtro. EDGAR HIPÓLITO CHAPARRO QUISPE

VOCAL: Mtro. ROLANDO GONZALO SALAZAR CALDERÓN JUÁREZ

ASESOR: Mtro. WILBER PERCY MENDOZA RAMIREZ

DECLARACION JURADA DE ORIGINALIDAD

Yo Fernando Huancapaza Zea, en calidad de Bachiller de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Privada de Tacna, identificado con DNI N°41349583.

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor de la tesis titulada:
“Análisis comparativo de métodos numéricos para obtener la respuesta dinámica de estructuras, Tacna 2021”, la misma que presento para optar el:
Título profesional de Ingeniero Civil.
2. La tesis no ha sido plagiada ni total ni parcialmente, para la cual se han respetado las normas internacionales de citas y referencias para las fuentes consultadas.
3. La tesis presentada no atenta contra los derechos de terceros.
4. La tesis no ha sido publicada ni presentada anteriormente para obtener algún grado académico previo o título profesional.
5. Los datos presentados en los resultados son reales, no han sido falsificados, ni duplicados, ni copiados.

Por lo expuesto, mediante la presente asumo frente a *La Universidad* cualquier responsabilidad que pudiera derivarse por la autoría, originalidad y veracidad del contenido de la tesis, así como por los derechos sobre la obra y/o invención presentada. En consecuencia, me hago responsable frente a *La Universidad* y a terceros, de cualquier daño que pudiera ocasionar, por el incumplimiento de lo declarado o que pudiera encontrar como causa del trabajo presentado, asumiendo todas las cargas pecuniarias que pudieran derivarse de ello en favor de terceros con motivo de acciones, reclamaciones o conflictos derivados del incumplimiento de lo declarado o las que encontrasen causa en el contenido de las tesis.

De identificarse fraude, piratería, plagio, falsificación o que el trabajo de investigación haya sido publicado anteriormente; asumo las consecuencias y sanciones que de mi acción se deriven, sometiéndome a la normatividad vigente de la Universidad Privada de Tacna.

Tacna, 14 de noviembre de 2021

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Fernando Huancapaza Zea', written over a horizontal line.

Bach. Huancapaza Zea, Fernando

DNI N° 41349583

DEDICATORIA

A Dios sobre todas las cosas

A mi hijo Diego, por ser mi motivación más grande

A Cecilia mi compañera por su amor y apoyo

A mi madre Rosenda, por criarme con valores y enseñarme el valor del trabajo

AGRADECIMIENTO

Gracias a mi familia, amigos y todos los que confían en mí y me ayudan a ser mejor persona.

ÍNDICE GENERAL

PÁGINA DEL JURADO.....	ii
DECLARACION JURADA DE ORIGINALIDAD	iii
DEDICATORIA.....	v
AGRADECIMIENTO	vi
ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE FIGURAS.....	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT.....	xii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:	3
1.1 Descripción del problema	3
1.2 Formulación del problema	4
1.2.1 Problema General	4
1.2.2 Problemas Específicos	4
1.3 Justificación de la Investigación	4
1.4 Objetivos	5
1.4.3 Objetivo General	5
1.4.4 Objetivos Específicos.....	5
1.5 hipótesis.....	6
1.5.5 Hipótesis General.....	6
1.5.6 Hipótesis Específicas.....	6
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO	7
2.1 Antecedentes del estudio	7
2.2 Bases Teóricas	10
2.2.1 Sistemas con un grado de libertad dinámico	10
2.2.2 Métodos Numéricos	21
2.2.3 Idealizar estructuras en modelos matemáticos.....	29
2.2.4 Respuesta dinámica de modelos matemáticos.....	34
CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO.....	36
3.1 Tipo y Nivel de la investigación	36
3.2 Población y/o muestra de estudio	36
3.2.1 Población:.....	36
3.2.2 Muestra:	37
3.3 Operacionalización de variables	37

3.4	Técnicas e instrumentos para la recolección de datos.....	38
3.5	Procesamiento y análisis de datos.....	38
3.5.3	Modelamiento de una estructura	38
3.5.4	Solución analítica del problema dinámico	45
3.5.5	Solución numérica del problema dinámico.....	48
CAPÍTULO IV. RESULTADOS		55
4.1	Modelamiento de la estructura en estudio	55
4.2	Modos de vibración.....	55
4.3	Desplazamientos	56
4.4	Método de Diferencia Central.....	57
4.5	Método de Houbolt	58
4.6	Método de Wilson	59
4.7	Método de Newmark.....	60
4.8	Análisis de los errores de los diferentes métodos Numéricos.....	61
4.9	Análisis sísmico para un acelerograma	64
CAPÍTULO V. DISCUSIÓN.....		68
CONCLUSIONES		69
RECOMENDACIONES		70
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		71
ANEXOS		72

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Operacionalización de variables	37
Tabla 2. Tabla para evaluación de métodos numéricos	38
Tabla 3. Primeras 6 iteraciones del método de Diferencia Central	49
Tabla 4. Primeras 6 iteraciones del método de Houbolt	51
Tabla 5. Primeras 6 iteraciones del método de Wilson.....	53
Tabla 6. Primeras 6 iteraciones del método de Newmark	54
Tabla 7. Desplazamientos del método de Diferencia Central.....	57
Tabla 8. Desplazamientos del método de Houbolt	58
Tabla 9. Desplazamientos del método de Wilson	59
Tabla 10. Desplazamientos del método de Newmark.....	60
Tabla 11. Desviación Estándar de los Errores de los Métodos	63
Tabla 12. Aceleraciones, desplazamientos y velocidades máximas	66
Tabla 13. Aceleraciones, desplazamientos y velocidades máximas Newmark	67

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Idealización de sistemas estructurales	11
Figura 2. Idealización de tanque de agua elevado.	12
Figura 3. Idealización de una edificación.	12
Figura 4. Idealización de un oscilador simple	13
Figura 5. Vibración libre de un sistema sin amortiguamiento.	16
Figura 6. Idealización de sistemas con amortiguamiento viscoso.	18
Figura 7. Puntos de cuadrícula equidistantes.	23
Figura 8. Suposición de aceleración lineal.	26
Figura 9. Elemento viga con dos sectores de rigidez infinita.	30
Figura 10. Elemento columna con dos sectores de rigidez infinita.	31
Figura 11. Pórtico de dos pisos para el análisis.	39
Figura 12. Numeración de nudos y grados de libertad	40
Figura 13. Modelo dinámico de la estructura pórtico de 2 pisos	55
Figura 14. Modos de vibración	56
Figura 15. Desplazamientos, Solución Analítica	56
Figura 16. Desplazamientos de cada piso método Diferencia Central.	57
Figura 17. Desplazamientos de cada piso método de Houbolt	58
Figura 18. Desplazamientos de cada piso método de Wilson	59
Figura 19. Desplazamientos de cada piso método de Newmark	60
Figura 20. Desplazamientos de solución analítica vs. soluciones numéricas	61
Figura 21. Dispersión de errores de los métodos numéricos	62
Figura 22. Histograma de errores de los métodos numéricos	62
Figura 23. Delta de tiempo versus desviación estándar del error	63
Figura 24. Modelo de cálculo de un pórtico plano para el análisis sísmico.	64
Figura 25. Desplazamiento del tercer piso solución del autor	65
Figura 26. Desplazamiento en el tiempo del piso 3 con $\alpha=1/6$ y $\beta=1/2$	66
Figura 27. Desplazamiento del segundo piso método de Newmark	67

RESUMEN

En la presente tesis “Análisis comparativo de métodos numéricos para obtener la respuesta dinámica de estructuras, Tacna 2021”, tiene como objetivo determinar el método numérico más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad, para lo cual realizamos la idealización matemática de un pórtico de dos pisos sobre el cual hacemos un análisis comparativo de los distintos métodos numéricos. Para la implementación de los métodos numéricos se ha utilizado el lenguaje de programación PYTHON, el cual dispone de diferentes herramientas y librerías como NumPy para el manejo de vectores, matrices y funciones matemáticas de alto nivel; la librería Matplotlib para la generación de gráficos. Calculamos primero la respuesta dinámica utilizando el método analítico realizando el desacoplamiento de la ecuación diferencial utilizando diagonalización por cambio de variables, también hallamos la solución numérica utilizando cada uno de los métodos; comparando la solución analítica con cada uno de los métodos obtuvimos los errores punto a punto sobre un intervalo de tiempo, hallando los valores de dispersión del error de cada método. Finalmente se determinó que el método más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de múltiples grados de libertad es el Método de Newmark el cual aplicamos para hallar la respuesta dinámica a lo largo del tiempo, utilizando un registro sísmico.

Palabras clave: Método Numérico, respuesta dinámica, idealización matemática, dispersión, registro sísmico.

ABSTRACT

In the present thesis "Comparative analysis of numerical methods to obtain the dynamic response of structures, Tacna 2021", aims to determine the most efficient numerical method to obtain the dynamic response of structures of various degrees of freedom, for which we idealize mathematics of a two-story portico on which we carry out a comparative analysis of the different numerical methods. For the implementation of the numerical methods, the programming language PYTHON is used, which has different tools and libraries such as NumPy, for the management of vectors, matrices and high-level mathematical functions; the Matplotlib library for the generation of graphs. We first calculate the dynamic response using the analytical method by decoupling the differential equation using diagonalization by change of variables, we also find the numerical solution using each of the methods, comparing the analytical solution with each of the methods, we obtain the point-to-point errors over a time interval, finding the dispersion values of the error of each method. Finally, it was determined that the most efficient method to obtain the dynamic response of structures with multiple degrees of freedom is the Newmark Method, which we apply to find the dynamic response over time, using a seismic record.

Keywords: Numerical method, dynamic response, mathematical idealization, dispersion, seismic record.

INTRODUCCIÓN

La investigación que realizamos en esta tesis está embarcado en la aplicación de los métodos numéricos para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad haciendo un análisis comparativo de ellos, dado que los registros sísmicos se hacen con acelerómetros, los datos se toman en intervalos de tiempo definidos muy pequeños, estos datos discretos en el tiempo, nos sirven perfectamente en los algoritmos recursivos que utilizan los métodos numéricos y dan respuestas muy acertadas para cargas de este tipo que no podrían resolverse de otra manera ya que los cálculos analíticos serían muy complejos o imposible para estructuras de varios grados de libertad.

Esta investigación se encuentra estructurado en 05 capítulos. En el Capítulo I, se describió el problema de investigación haciendo un análisis respecto de la dificultad o limitaciones de dinámica estructural para abordar problemas relacionados a determinar la respuesta para cargas dinámica en el tiempo. Se formuló también los objetivos que nos llevan a solucionar esta problemática desde un punto de vista computacional, para lo cual se formularon la hipótesis general y específicas.

En el Capítulo II, se desarrolló el marco teórico, presentamos algunos antecedentes más importantes relacionados con esta investigación como artículo presentado por Hilarión y Segrera del año 2014 titulado "Programa didáctico a código abierto de análisis dinámico de estructuras Undin 1.0" presenta un Programa de código abierto para el Análisis Dinámico de Estructuras, el cual fue presentado en la revista educación en Ingeniería Vol.9. También se desarrollaron las bases teóricas y los puntos más importantes para abordar problemas de dinámica estructural como obtención de las ecuaciones para vibraciones de un grado de libertad con y sin amortiguamiento viscoso, la idealización de estructuras en modelos matemáticas y métodos numéricos.

En el Capítulo III, se desarrolló el marco metodológico donde se determinó el tipo y el Nivel de investigación, ámbito de estudio, población y muestra. En este capítulo también se desarrolló el procesamiento y análisis de datos donde se realizaron todos los cálculos como el modelamiento matemático de una estructura, cálculo de la solución analítica y numérica del modelo.

En el Capítulo IV, se presentan los resultados de la investigación, mostrando los cálculos previos, Matrices de masa, Matriz de Rigidez, Matriz de amortiguamiento, modos de vibración, las soluciones analíticas y numéricas del problema dinámico, se muestran las medidas de dispersión de los errores de cada método y la aplicación con un acelerograma de un sismo real.

En el Capítulo V, se da a conocer las conclusiones del trabajo y sugerencias.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del problema

Uno de los Temas más importantes en la ingeniería estructural es determinar el comportamiento de las estructuras ante sollicitaciones dinámicas, aquellas cuyas magnitudes varían a lo largo de un intervalo de tiempo como pueden ser los producidos por maquinarias, explosiones, vientos, fuertes oleajes o el más estudiado que serían los movimientos sísmicos, estos últimos pueden generar en la estructura daños graves que pueden llegar a colapsar la edificación de aquí la importancia de poder determinarlo con mucha precisión.

la solución analítica del problema dinámico de una estructura se complica en la práctica por el alto grado de dificultad para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales y la complejidad de las estructuras con varios grados de libertad

pasa por resolver matemáticamente las ecuaciones del movimiento oscilatorio considerando parámetros como las rigideces, masas concentradas, nodos, grados de libertad, la función de carga entre otros muchos otros parámetros idealizados para el caso en estudio, hace difícil sino casi imposible su aplicación en la práctica eso sin considerar que la función de carga es una función matemática que no representa en la realidad a una carga dinámica, la cual varía con el tiempo de forma irregular.

En los problemas de ingeniería no es siempre posible obtener soluciones matemáticas rigurosas. En verdad, sólo en algunos casos simples pueden obtenerse soluciones analíticas. Cuando los problemas implican propiedades de materiales, distribución de cargas y condiciones de contorno complejas, es necesario introducir simplificaciones o idealizaciones para reducir el problema a una solución matemática que sea capaz de dar resultados aceptables desde el punto de vista de la seguridad y la economía (PAZ, 1992).

Los avances tecnológicos en el campo computacional han permitido en los últimos años la aplicación de métodos numéricos en diversos campos de la ingeniería, permitiendo el auge de los softwares comerciales muchos de los cuales son usados por personal capacitado especialmente para un tipo de software y la gran mayoría son de pago.

1.2 Formulación del problema

De lo mencionado anteriormente se formula las siguientes interrogantes:

1.2.1 Problema General

¿Qué método numérico es el más eficaz para determinar la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad?

1.2.2 Problemas Específicos

- ¿Cuáles son los métodos numéricos propios de la dinámica estructural?
- ¿Cómo se idealizan modelos matemáticos de estructuras reales, para realizar un análisis dinámico?
- ¿Cuál es la respuesta dinámica de modelos idealizados de estructuras de varios grados de libertad?

1.3 Justificación de la Investigación

1.3.3 Desde el punto de vista científico

Al realizar un proyecto estructural, los estudios con cargas estáticas están bien documentados y son ampliamente utilizados, mientras que los estudios de análisis con cargas dinámicas, cargas que varían temporalmente son poco conocidos por su gran complejidad matemática, y difícil aplicación, es importante conocer los procedimientos al respecto y los métodos numéricos se presentan como una herramienta importante para el desarrollo y avance en este aspecto.

1.3.4 Desde el punto de vista social

Al evaluar la respuesta dinámica de edificios se utilizan softwares como herramientas para diseñar y obtener los cálculos de estructuras, estos software utilizan internamente una variedad de métodos numéricos para evaluar la respuesta de edificios ante eventos sísmicos siguiendo las normativas vigentes, esto finalmente brinda la seguridad de la estructura ante eventos sísmicos que son los que tienen que evitar causar graves daños en la infraestructura de las viviendas o de infraestructuras de gran importancia ante emergencias como hospitales o colegios donde finalmente la sociedad se desenvuelve.

1.3.5 Desde el punto de vista económico

Los métodos numéricos utilizados en esta investigación pueden ser utilizados como punto de partida para el desarrollo de nuevos softwares de código abierto, ya que los softwares en la actualidad tienen limitaciones y costos elevados, se pretende revisar y seleccionar los algoritmos más adecuados para el análisis dinámico de estructuras.

1.4 Objetivos

1.4.6 Objetivo General

Determinar el método numérico más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad.

1.4.7 Objetivos Específicos

- Identificar los métodos numéricos más eficaces para obtener una respuesta dinámica.
- Idealizar estructuras reales en modelos matemáticos para su evaluación dinámica.

- Obtener la respuesta dinámica de modelos idealizados de estructuras de varios grados de libertad.

1.5 Hipótesis

1.5.8 Hipótesis General

Evaluando los diferentes métodos numéricos, se obtiene el método más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad.

1.5.9 Hipótesis Específicas

- Los métodos numéricos de integración directa son eficaces para determinar la respuesta dinámica de estructuras.
- Se pueden idealizar las estructuras reales con modelos matemáticos, utilizando matrices de masas, rigideces y amortiguamiento.
- La respuesta dinámica se obtiene idealizando estructuras de varios grados de libertad y aplicando métodos numéricos.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

En el artículo presentado por Vásconez et al. (2016), en su trabajo titulado "Análisis de respuesta elástica en el tiempo aplicando el método de Newmark y el método de Wilson" realiza una deducción del método de Newmark y Wilson, haciendo un análisis sobre sus propiedades y variables, comparando los resultados para finalmente aplicarlo a una estructura bajo una sollicitación dinámica (sismo) usando acelerogramas de sismos pasados. El autor utiliza Matlab como herramienta computacional para evaluar los métodos y también unos programas matriciales de cálculo Ceinci-Lab que fue desarrollado por la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE del Ecuador, estos programas facilitan encontrar la respuesta en el tiempo de una estructura, concluyen que el valor límite del incremento de tiempo, no puede ser mayor a $2/\text{frecuencia}$ o tampoco a $0,551 \cdot \text{Periodo}$. También concluyen que, si se coloca una gama y una beta más elevados en el sistema de ecuaciones en el método de Newmark, este genera la inclusión de un amortiguamiento en el cálculo de la respuesta dinámica.

En el artículo presentado por Castro Medina et al. (2014), en su trabajo titulado "Modelización numérica del comportamiento estructural cíclico de barras esbeltas de acero con pandeo restringido" tiene como objetivo, presentar un modelo numérico del comportamiento estructural de barras de pandeo restringido, estos se utilizan como arriostramientos los cuales absorben la energía aportada por los eventos sísmicos, evitando el colapso prematuro de la estructura. El autor destaca la ausencia de modelos numéricos precisos y fiables para analizar el comportamiento estructural de estos dispositivos. Utiliza un modelo numérico para predecir el comportamiento estructural de una barra de pandeo restringido, el cual está constituido por una barra de acero recubierto por una capa de concreto rígido. Los resultados que muestra el autor del modelo integrado de las barras de pandeo restringido, ponen de manifiesto la capacidad del modelo para reproducir los fenómenos implicados en el comportamiento no lineal de barras de pandeo restringido. Finalmente, completa la constatación de sus resultados mediante otro artículo en el cual compara los resultados experimentales y los resultados numéricos obtenidos con el modelo presentado en este artículo.

En el artículo presentado por Hilarión y Segre (2014), titulado "Programa didáctico a código abierto de análisis dinámico de estructuras Undin 1.0", el cual fue presentado en la revista Educación en Ingeniería Vol.9 del año 2014, se presenta un Programa de código abierto de Análisis Dinámico de Estructuras UNDIN en su primera versión 1.0, el cual sirve para calcular los modos y frecuencias de vibración, desplazamientos, reacciones y acciones internas de pórticos planos y espaciales, bajo la acción de aceleraciones en los apoyos, considerando amortiguamiento, no linealidad del material y deformaciones infinitesimales; realizan la explicación de cómo usar el programa y lo aplican a un pórtico plano, hace una comparación con los resultados obtenidos por el Software SAP2000, y finalmente concluye que los resultados del software, cumple y se encuentra muy cerca de los resultados obtenidos por software comerciales.

En la Tesis titulado "Análisis comparativo de métodos numéricos en integración directa para evaluar la respuesta dinámica de estructuras" realiza una comparativa de los métodos numéricos de Aceleración Lineal, Aceleración Promedio y método de Wilson, para implementar los algoritmos de los diferentes métodos numéricos los implementa en el lenguaje de programación Fortran 90/95. Finalmente realiza una aplicación sobre una estructura con y sin amortiguamiento en el último nivel, para diferentes intervalos de tiempo, concluye que el método de aceleración promedio presenta mayor estabilidad en su comportamiento, el método de aceleración lineal presenta practicidad en su procedimiento y utiliza pasos de tiempo muy pequeños, el método de Wilson proporciona buenos resultados, aunque si se manejan pasos de tiempo grandes presenta dispersión numérica (Trejo Molina, 2007).

En el artículo titulado "Resolución numérica de las ecuaciones del movimiento de edificios de varias plantas con no linealidades severas" en la Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería del año 2014; tiene como objetivo presenta un modelo numérico del comportamiento dinámico horizontal de pórticos planos en varias plantas que incorporan disipadores friccionales como sistema de protección sismorresistente. propone también que haciendo pequeñas modificaciones que el modelo puede describir el comportamiento de edificios sometidos a ráfagas de viento o apoyados sobre aisladores friccionales. Utiliza en su algoritmo un método de integración paso a paso de las ecuaciones de movimiento y consiste básicamente en una modificación del método de aceleración lineal; destaca la principal aportación en la comprobación en cada instante discreto de cálculo de las condiciones de deslizamiento o de bloqueo en los disipadores de fricción. Los autores

concluyen en la eficacia computacional del algoritmo comparando ventajosamente los recursos requeridos (en términos de tiempo de cálculo o de asignación de memoria) con los de otros algoritmos. Los autores remarcan la relativa carencia de modelos numéricos capaces de reproducir con suficiente fiabilidad el comportamiento estructural de edificios con disipadores friccionales (López-Almansa y Oller, 2014).

El artículo titulado “Estimación de las masas modales de una estructura en servicio mediante transformación en el espacio de estados” tiene como objetivos, presentar una metodología práctica para estimar los parámetros modales de estructuras en uso; según los autores el trabajo no sólo consiste en calcular frecuencias propias y factores de amortiguamiento asociados a cada uno de los modelos estimados, sino también calcular las masas generalizadas correspondientes a cada uno de los modos estimados de la estructura. Para realizar ello primero obtienen una representación del sistema dinámico en el espacio de estados mediante la técnica SSI (Stochastic Subspace Identification) y, en segundo lugar, mediante la adecuada matriz de transformación, llegan a la representación que les permite identificar los parámetros físicos del sistema (matrices de masa, amortiguamiento y rigidez), lo que les permitió obtener masas modales y/o modos normalizados respecto de la matriz de masa, principal novedad de su propuesta. La primera conclusión a la que llegan es que sólo se pueden obtener con precisión los parámetros modales que corresponden a los modos de vibración que seamos capaces de excitar. Aunque es lógica, esta conclusión indica los autores ha de estar siempre presente tanto en la planificación de las pruebas como en el post-procesado de los registros. En relación a la precisión en la estimación de los modelos de vibración normalizados respecto a la matriz de masa, se considera que es suficiente, teniendo en cuenta además la dificultad que tiene su obtención a partir de los registros experimentales, ya que en los métodos de identificación de sistemas no se tiene en ningún momento una expresión explícita de la matriz de masa. También obtienen una buena precisión en la determinación de las frecuencias propias, siendo menor en otras magnitudes como los factores de amortiguamiento, las masas generalizadas o los modos de vibración. Resaltan también que la principal ventaja respecto a otros métodos de escalado de los modos, radica en que con una mínima información experimental respecto a la entrada (un solo canal coincidente con el correspondiente registro de salida) y sin necesidad de modelos computacionales complejos, con tan solo las transformaciones matemáticas indicadas, se consigue determinar las masas modales de los modos excitables (Cacho-Pérez et al., 2017).

2.2 Bases Teóricas

Las idealizaciones son necesarias al momento de estudiar la dinámica estructural, nos sirve para llevar la complejidad del problema a un punto en el cual pueda ser analizado y calculado; esta simplificación debe contener la esencia de lo que se quiere estudiar, de tal manera que los cálculos sean factibles de realizar y los resultados sean lo suficientemente aceptables.

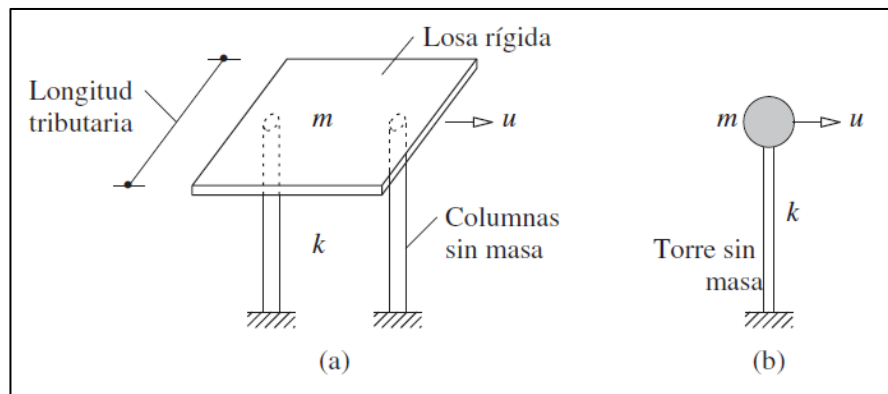
El estudio de la dinámica estructural se inicia analizando las vibraciones de estructuras simples con un grado de libertad, se describen las ecuaciones que describen tal movimiento y la solución analítica de tales ecuaciones nos sirve como inicio para introducir los conceptos que luego serán ampliados para estructuras más complejas.

2.2.1 Sistemas con un grado de libertad dinámico

Los sistemas con un grado de libertad son movimientos de vibración libre, siendo este el caso más sencillo de estudio. (RAO, 2012), sobre las vibraciones, señala:

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama vibración u oscilación. El vaivén de un péndulo y el movimiento de una cuerda pulsada son ejemplos comunes de vibración. La teoría de la vibración tiene que ver con el estudio de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos.

Un sistema de un grado de libertad puede considerarse como una idealización de una estructura de un nivel. Cada elemento estructural (viga, columna, muro, etcétera) de la estructura real contribuye a las propiedades inerciales (masa), elásticas (rigidez o flexibilidad) y de disipación de la energía (amortiguamiento) de la estructura. Sin embargo, en el sistema idealizado, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puros distintos: el componente de masa, el componente de rigidez y el componente de amortiguamiento. (Chopra, 2014).

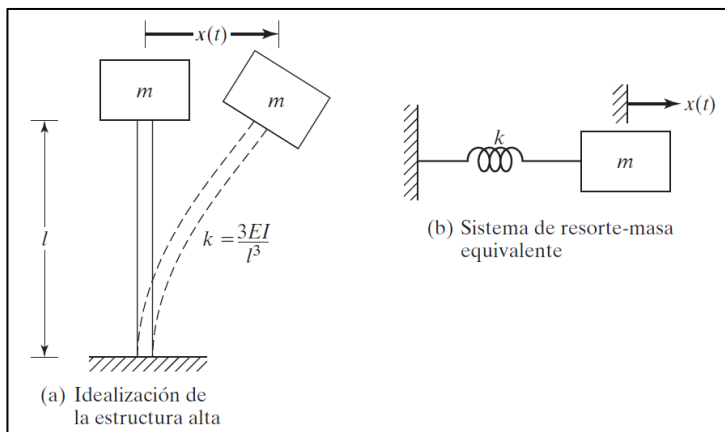
Figura 1*Idealización de sistemas estructurales*

Nota. (a) Pérgola idealizada (b) tanque de agua idealizado. Adaptado de Chopra (2014).

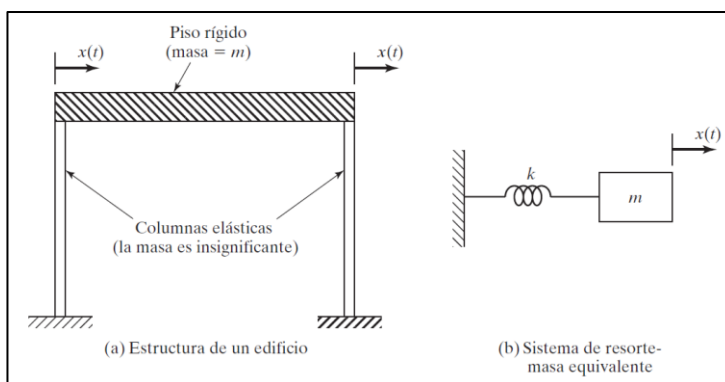
En la Figura 1(a), se observa la idealización de una pérgola cuya masa se concentra mayoritariamente en la losa rígida, considerando para el análisis a las columnas sin masa y en la Figura 1(b), observamos la idealización de un tanque de agua cuya torre se considera sin masa.

a. Vibración libre no amortiguada

Podemos observar que ambas estructuras anteriormente idealizadas tienen sus componentes puros (masa y rigidez) y pueden ser modelados como un sistema masa-resorte (oscilador armónico simple) equivalentes como se muestra en la Figura 2 y Figura 3, siempre y cuando la deformación este en el rango elástico lineal.

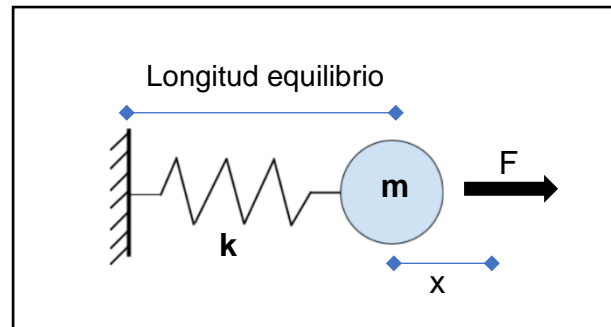
Figura 2*Idealización de tanque de agua elevado*

Nota. (a) idealización de un tanque (b) sistema equivalente. Adaptado de Rao (2012)

Figura 3*Idealización de una edificación*

Nota. (a) idealización de un edificio (b) sistema equivalente. Adaptado de Rao (2012)

El sistema oscilador de la Figura 4 se encuentra en posición de equilibrio estático siempre y cuando no haya ninguna fuerza deformadora que la altere; el resorte es un resorte elástico y este ejerce una fuerza proporcional y en dirección opuesta a la deformación x .

Figura 4*Idealización de un oscilador simple*

Nota. oscilador armónico simple compuesto por una masa concentrada puesta en una posición de equilibrio en reposo determinado, este tiene acoplado un resorte con una rigidez k .

Si el sistema es deformado, la fuerza de recuperación del muelle es opuesta a la deformación y su expresión sería la siguiente:

$$F = -kx \quad (1)$$

Donde:

- F : Fuerza deformadora
- k : coeficiente de rigidez del resorte
- x : elongación o desplazamiento

Aplicando la segunda ley de Newton (principio de la cantidad de movimiento), obtenemos la ecuación dinámica del sistema, en donde m es la masa.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

La vibración libre se inicia al sacar al sistema de su posición de equilibrio estático, impartiendo a la masa cierto desplazamiento $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$ en el tiempo cero, definido como el instante en que se inicia el movimiento (Chopra, 2014)

La solución de la ecuación (02), una ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo grado con coeficientes constantes, tiene la forma.

$$x = e^{\lambda t} \quad (3)$$

En la ecuación (03), la constante λ es desconocida. Derivamos dos veces a esta expresión y reemplazamos las mismas en la ecuación (02) se obtiene.

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (4)$$

Siendo que el termino exponencial nunca puede ser cero, entonces:

$$(m\lambda^2 + k) = 0 \quad (5)$$

Conocida como la ecuación característica, la misma que tiene dos raíces:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

Haciendo

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{entonces} \quad \lambda_{1,2} = \pm i \omega_n \quad (7)$$

Donde:

- ω_n : frecuencia natural del sistema

La solución general de la ecuación (02) será:

$$x(t) = a_1 e^{+i\omega_n t} + a_2 e^{-i\omega_n t} \quad (8)$$

Usando las relaciones de Euler $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, finalmente obtenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad (9)$$

Donde A y B son constantes con valores todavía por determinar

Derivamos la ecuación (09) y obtenemos:

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t) + \omega_n B \cos(\omega_n t) \quad (10)$$

Si consideramos que el movimiento se inicia en el tiempo cero en la ecuación (09) de desplazamiento

$$x(0) = A \cos(\omega_n 0) + B \sin(\omega_n 0) \quad (11)$$

$$A = x(0) \quad (12)$$

Si consideramos que el movimiento se inicia en el tiempo cero en la ecuación (10) de velocidad

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A \sin(\omega_n 0) + \omega_n B \cos(\omega_n 0) \quad (13)$$

$$B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \quad (14)$$

Al sustituir los valores de las constantes A y B en la ecuación (09) resulta la solución analítica para desplazamiento sujeta a las condiciones iniciales.

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (15)$$

Como son dos funciones de tiempo armónicas el seno y el coseno tienen un desfase entre ellas de tal manera que podemos hacer un cambio de variables.

$$A = C \cos \varphi \quad , \quad B = C \sin \varphi \quad (16)$$

Donde:

- φ : Ángulo de desfase
- C : Constante aun por determinar

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o}{\omega_n}\right)^2} \quad (16)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_o}{\omega_n x_o}\right) \quad (17)$$

Haciendo el cambio de variable en la ecuación (09) resulta

$$x(t) = C \cos \varphi \cos(\omega_n t) + C \sin \varphi \sin(\omega_n t) \quad (18)$$

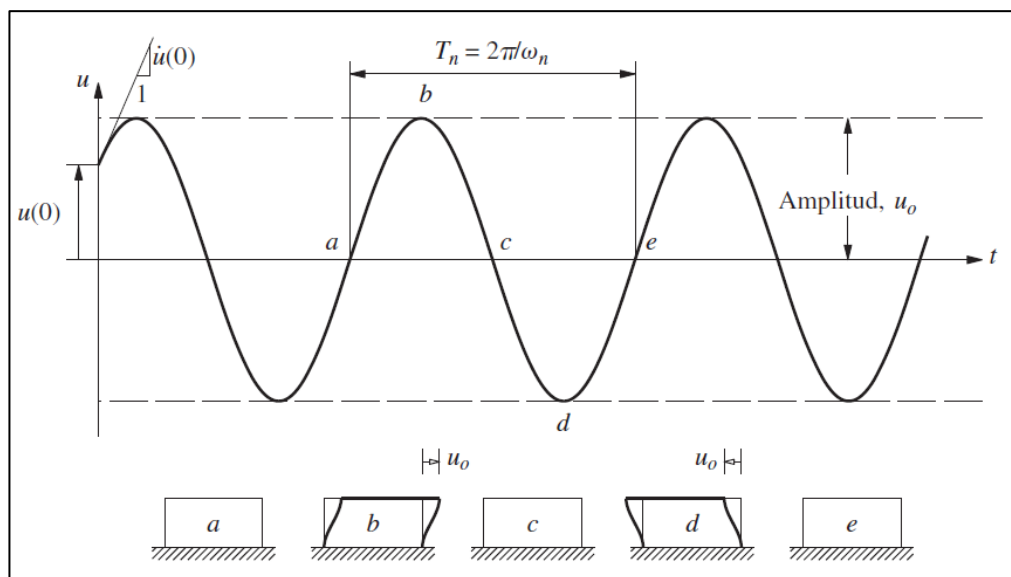
Aplicamos identidades trigonométricas obtenemos:

$$x(t) = C \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (19)$$

En la Figura 5 se muestra una gráfica de la ecuación de desplazamiento para el caso de condiciones iniciales en el tiempo inicial cero.

Figura 5

Vibración libre de un sistema sin amortiguamiento



Nota. Vibración libre, parte desde una posición inicial $u(0)$ y con una velocidad inicial $\dot{u}(0)$, este se repite en un periodo de tiempo T , presenta una amplitud máxima de u_o . Adaptado de Chopra (2014)

La ecuación (19) define una ondulación armónica (es decir, sinusoidal). Se trata de un movimiento periódico, puesto que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo, denominado periodo, de manera indefinida. En este caso el periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (20)$$

El parámetro ω_n recibe el nombre de pulsación o frecuencia angular natural del sistema; representa la frecuencia angular con la que el sistema oscila cuando se le separa de su posición de equilibrio y se le libera para que este se mueva libremente. (Goicolea Ruigomez, 2010).

El periodo T es el tiempo que tarda un ciclo, y siempre es positivo. La Unidad en el S.I. es el segundo.

La frecuencia f , es el número de ciclos en una unidad de tiempo y es siempre positiva, la unidad de medida de frecuencia en el S.I. es el Hertz.

$$1 \text{ hertz} = 1\text{Hz} = 1 \text{ ciclo}/s = 1s^{-1} \quad (21)$$

La frecuencia angular natural ω_n , es 2π veces la frecuencia

$$\omega_n = 2\pi f \quad (22)$$

Representa la razón de cambio de una cantidad angular (no necesariamente relacionada con un movimiento) que siempre se mide en radianes, de modo que sus unidades son rad/s .

b. Vibración libre viscosamente amortiguada

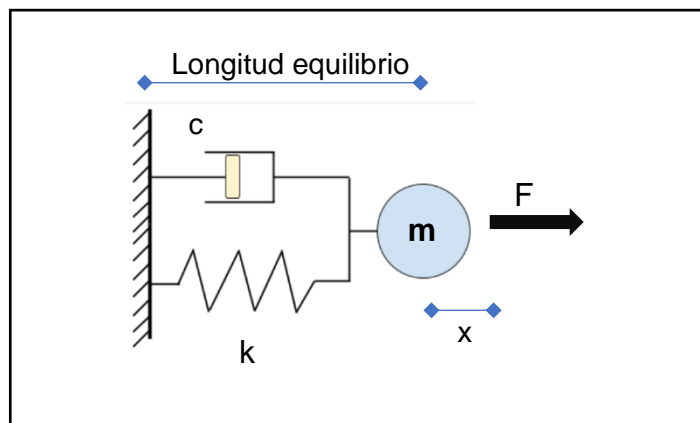
Podemos observar que ambas estructuras anteriormente idealizadas tienen sus componentes puros (masa y rigidez) y pueden ser modelados como un sistema masa-resorte (oscilador armónico simple) en condiciones idealizadas.

hemos visto que, en condiciones idealizadas, sin amortiguación, el oscilador simple una vez excitado oscila indefinidamente con una amplitud constante, a su frecuencia natural. La experiencia nos indica, sin embargo, que no es posible tener un mecanismo que vibre en esas condiciones ideales. Fuerzas llamadas de fricción o de amortiguación están siempre presentes en cualquier sistema en movimiento. El mecanismo de esta transformación o disipación de energía es bastante complejo y en la actualidad no se comprende totalmente. Para considerar estas fuerzas de disipación en el análisis de sistemas dinámicos, es necesario introducir simplificaciones, basadas en la experiencia, en cuanto a su naturaleza.(PAZ, 1992).

Aunque el amortiguamiento en las estructuras reales se debe a varios mecanismos de disipación de la energía que actúan de manera simultánea, un enfoque matemáticamente práctico consiste en idealizarlos mediante el amortiguamiento viscoso equivalente.(Chopra, 2014).

Figura 6

Idealización de sistemas con amortiguamiento viscoso



Nota. oscilador armónico simple con amortiguador viscoso, tiene una masa concentrada m , el cual se encuentra en una posición de equilibrio en reposo, está acoplado a un muelle o resorte de coeficiente k y un amortiguador viscoso de coeficiente c .

Si el sistema es deformado, la fuerza de recuperación del muelle es opuesta a la deformación y su expresión sería la siguiente:

$$F = -kx \quad (23)$$

Un amortiguador viscoso equivalente ejerce una fuerza de resistencia pasiva proporcional a la velocidad, de sentido opuesto al movimiento y su expresión sería la siguiente:

$$F_A = -c\dot{x} \quad (24)$$

Donde:

- c : coeficiente de amortiguamiento viscoso
- F_A : Fuerza interna en el amortiguador

Aplicando la segunda ley de Newton (principio de la cantidad de movimiento), obtenemos la ecuación dinámica del sistema.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (25)$$

Conocemos que la frecuencia natural w_n y el periodo de vibración T , valen:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{w_n} \quad (26)$$

Definimos ahora el factor de amortiguamiento ξ como:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (27)$$

Dividimos la ecuación (25) entre la masa m y reorganizamos para incluir el valor de amortiguamiento antes definido resulta:

$$\ddot{x} + 2\xi w_n \dot{x} + w_n^2 x = 0 \quad (29)$$

La solución de la ecuación (25), es del mismo tipo que en el caso anterior sin amortiguamiento, es decir, basadas en funciones armónicas. Tan solo es necesario aquí generalizar algo la expresión de las soluciones ensayadas, para lo cual emplearemos una exponencial del tipo.

$$x(t) = C e^{\lambda t} \quad (30)$$

En la cual λ y C , son constantes desconocidas por determinar. Derivamos dos veces a esta expresión y reemplazamos las mismas en la ecuación (29) se obtiene.

$$C e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\xi w_n \lambda + w_n^2) = 0 \quad (31)$$

Siendo que el termino exponencial nunca puede ser cero, entonces:

$$(\lambda^2 + 2\xi w_n \lambda + w_n^2) = 0 \quad (32)$$

$$\lambda_{1,2} = -\xi w_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1} w_n \quad (33)$$

Según el valor que toma el amortiguamiento ξ , luego el valor del radical puede ser positivo, cero o negativo, pueden distinguirse varios tipos de solución:

- a) $0 < \xi < 1$ *Vibracion sub amortiguada*
- b) $\xi > 1$ *Vibracion sobre amortiguada*
- c) $\xi = 1$ *Vibracion critica amortiguada*

En estructuras civiles se encuentran con amortiguamientos sub-amortiguados

Para simplificar los cálculos hacemos w_a igual a:

$$w_a = w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (34)$$

Reescribimos las raíces λ de la ecuación (33) resulta:

$$\lambda_{1,2} = -\xi w_n \pm w_a i \quad (35)$$

Entonces la solución de la ecuación (30) será:

$$x(t) = e^{-\xi w_n t} [A \cos(w_a t) + B \sin(w_a t)] \quad (36)$$

Donde A y B son constantes por determinar.

Derivamos la ecuación (36) y aplicamos condiciones iniciales tenemos:

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi w_n t} [(w_a B - \xi w_n A) \cos(w_a t) + (w_a A - \xi w_n B) \sin(w_a t)] \quad (37)$$

La vibración se inicia al sacar al sistema de su posición de equilibrio estático, impartiendo a la masa cierto desplazamiento $x(0)$ y velocidad $\dot{x}(0)$ en el tiempo cero, definido como el instante en que se inicia el movimiento: (Chopra, 2014)

$$x = x(0) \quad \rightarrow \quad A = x(0) \quad (38)$$

$$\dot{x} = \dot{x}(0) \quad \rightarrow \quad B = \frac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_a} \quad (39)$$

Como son dos funciones de tiempo armónicas el seno y el coseno tienen un desfase entre ellas de tal manera que podemos hacer un cambio de variables.

$$A = C \cos \varphi \quad (40)$$

$$B = C \sin \varphi \quad (41)$$

Donde:

- φ : Ángulo de desfase

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_a}\right)^2} \quad (42)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi w_n x_0}{w_a x_0}\right) \quad (43)$$

Reemplazando todo en la ecuación (36) y utilizando identidades trigonométricas tenemos:

$$x(t) = C e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi) \quad (44)$$

2.2.2 Métodos Numéricos

a. Método de Diferencia Central para sistemas de varios grados de libertad

Para un sistema de varios grados de libertad viscosamente amortiguado, La ecuación de movimiento se expresa como:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \quad (45)$$

Donde:

- $[m]$: Matriz de Masas
- $[c]$: Matriz de Amortiguamiento
- $[k]$: Matriz de Rigidez
- \vec{x} : Vector de Desplazamiento
- \vec{F} : Vector de Fuerza

Para obtener los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo $t_i = i\Delta t$ ($\dot{\vec{x}}_i$ y $\ddot{\vec{x}}_i$) tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{1}{2\Delta t} (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}) \quad (46)$$

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}) \quad (47)$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento, ecuación (45), en el tiempo t_i se escribe como:

$$[m] \frac{1}{(\Delta t)^2} (\vec{x}_{i+1} - 2\vec{x}_i + \vec{x}_{i-1}) + [c] \frac{1}{2\Delta t} (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_{i-1}) + [k]\vec{x}_i = \vec{F}_i \quad (48)$$

Donde:

- $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}(t = t_{i+1})$
- $\vec{x}_i = \vec{x}(t = t_i)$
- $\vec{x}_{i-1} = \vec{x}(t = t_{i-1})$
- $\vec{F}_i = \vec{F}(t = t_i)$

- $t_i = i\Delta t$

Reacomodamos la ecuación (48) para obtener:

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] + \frac{1}{2\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i+1} = \vec{F}_i - \left([k] - \frac{2}{(\Delta t)^2}[m]\right)\vec{x}_i - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2}[m] - \frac{1}{2\Delta t}[c]\right)\vec{x}_{i-1} \quad (49)$$

De la ecuación (49) obtenemos el vector de solución \vec{x}_{i+1} una vez determinemos los valores de \vec{x}_i y \vec{x}_{i-1} .

Como es necesario utilizar la ecuación (49) para los valores de $i = 1, 2, 3, \dots, n$, es necesario evaluar el valor de \vec{x}_1 que a su vez necesita evaluar antes \vec{x}_0 y \vec{x}_{-1} . Por lo tanto, se requiere un procedimiento de inicio especial para obtener $\vec{x}_{-1} = \vec{x}(t = -\Delta t)$.

Para esto, se evalúan las ecuaciones (45) a (47) en $i = 0$ y obtenemos:

$$[m]\ddot{\vec{x}}_0 + [c]\dot{\vec{x}}_0 + [k]\vec{x}_0 = \vec{F}_0 = \vec{F}(t = 0) \quad (50)$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{1}{2\Delta t}(\vec{x}_1 - \vec{x}_{-1}) \quad (51)$$

$$\ddot{\vec{x}}_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\vec{x}_1 - 2\vec{x}_0 + \vec{x}_{-1}) \quad (52)$$

De la ecuación (50) encontramos el vector de aceleración inicial

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [m]^{-1}(\vec{F}_0 - [c]\dot{\vec{x}}_0 - [k]\vec{x}_0) \quad (53)$$

De la ecuación (51) encontramos el vector de desplazamiento en t_1

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_{-1} + 2\Delta t\dot{\vec{x}}_0 \quad (54)$$

Sustituyendo la ecuación (54) para \vec{x}_1 , la ecuación (52) produce

$$\vec{x}_{-1} = \vec{x}_0 - \Delta t\dot{\vec{x}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\vec{x}}_0 \quad (55)$$

Donde la ecuación (53) entrega $\ddot{\vec{x}}_0$. Por lo tanto, la ecuación (55) da el valor \vec{x}_{-1} requerido para aplicar la ecuación (49) en $i = 1$.

b. Método de Houbolt

Para el desarrollo del método de Houbolt se emplean las siguientes expansiones de diferencia finita:

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11\vec{x}_{i+1} - 18\vec{x}_i + 9\vec{x}_{i-1} - 2\vec{x}_{i-2}), \quad (56)$$

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2\vec{x}_{i+1} - 5\vec{x}_i + 4\vec{x}_{i-1} - \vec{x}_{i-2}) \quad (57)$$

Para derivar las ecuaciones (56) y (57) consideramos la función $x(t)$. Para los valores de la cuadrícula temporal equidistantes:

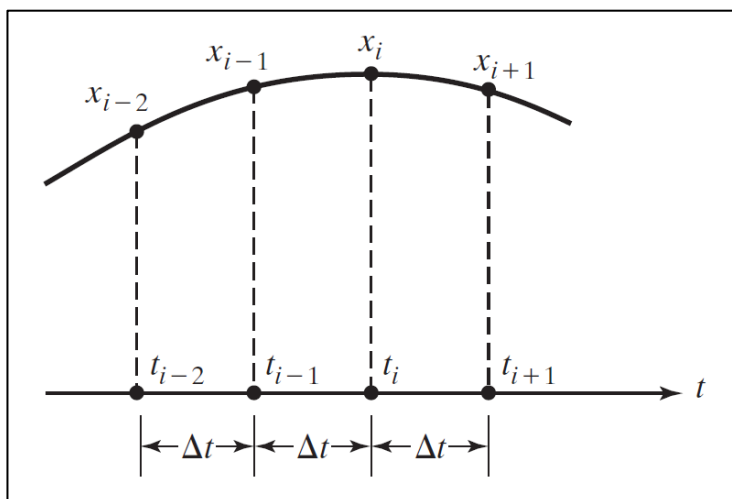
- $t_{i-2} = t_i - 2\Delta t$; $t_{i-1} = t_i - \Delta t$; t_i ; $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

Se corresponden los valores de x siguientes, como se muestra en la Figura 7:

- x_{i-2} ; x_{i-1} ; x_i ; x_{i+1}

Figura 7

Puntos de cuadrícula equidistantes



Nota. cuadrícula equidistante tiempo VS desplazamiento.

Adaptado de Rao (2012).

La expansión de la serie de Taylor, con intervalo hacia atrás, presenta varias posibilidades.

- Con intervalo = Δt

$$x_i = x_{i+1} - \Delta t \dot{x}_{i+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{x}_{i+1} - \frac{(\Delta t)^3}{6} \dddot{x}_{i+1} + \dots \quad (58)$$

- Con intervalo = $2\Delta t$

$$x_{i-1} = x_{i+1} - 2\Delta t \dot{x}_{i+1} + 2(\Delta t)^2 \ddot{x}_{i+1} - \frac{4}{3}(\Delta t)^3 \dddot{x}_{i+1} + \dots \quad (59)$$

- Con intervalo = $3\Delta t$

$$x_{i-2} = x_{i+1} - 3\Delta t \dot{x}_{i+1} + \frac{9}{2}(\Delta t)^2 \ddot{x}_{i+1} - \frac{9}{2}(\Delta t)^3 \dddot{x}_{i+1} + \dots \quad (60)$$

Considerando términos sólo hasta $(\Delta t)^3$, las ecuaciones (58) a (60) se resuelven para expresar:

$$\bullet \quad \dot{x}_{i+1} \quad ; \quad \ddot{x}_{i+1} \quad ; \quad \dddot{x}_{i+1}$$

En función de

$$\bullet \quad x_{i-2} \quad ; \quad x_{i-1} \quad ; \quad x_i \quad ; \quad x_{i+1}$$

De este modo se obtiene

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{6(\Delta t)} (11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2}) \quad (61)$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2}) \quad (62)$$

Las ecuaciones (56) y (57) representan la forma vectorial de estas ecuaciones.

Para hallar la solución en el intervalo $i + 1$ (\vec{x}_{i+1}), consideramos la ecuación (45) en t_{i+1} , de modo que:

$$[m]\ddot{\vec{x}}_{i+1} + [c]\dot{\vec{x}}_{i+1} + [k]\vec{x}_{i+1} = \vec{F}_{i+1} \equiv \vec{F}(t = t_{i+1}) \quad (63)$$

Sustituyendo las ecuaciones (56) y (57) en la ecuación (63), obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{11}{6\Delta t} [c] + [k] \right) \vec{x}_{i+1} &= \vec{F}_{i+1} + \left(\frac{5}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{3}{\Delta t} [c] \right) \vec{x}_i - \left(\frac{4}{(\Delta t)^2} [m] + \right. \\ &\left. \frac{3}{2\Delta t} [c] \right) \vec{x}_{i-1} + \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{1}{3\Delta t} [c] \right) \vec{x}_{i-2} \end{aligned} \quad (64)$$

Observe que la ecuación de equilibrio en el tiempo t_{i+1} , ecuación (63), se utiliza para determinar la solución \vec{x}_{i+1} por medio de la ecuación (64). Esto también es cierto

para los métodos de Wilson y Newmark, por lo que se les llama Métodos de integración implícita.

De la ecuación (64) se desprende que se requiere tener conocimiento de:

$$\bullet \vec{x}_i \quad ; \quad \vec{x}_{i-1} \quad ; \quad \vec{x}_{i-2}$$

Para encontrar la solución \vec{x}_{i+1} . Por lo tanto, se tienen que hallar los valores de:

$$\bullet \vec{x}_{-1} \quad ; \quad \vec{x}_{-2}$$

Antes de tratar de encontrar el vector \vec{x}_1 aplicando la ecuación (64) Dado que no hay un método directo para hallar

$$\bullet \vec{x}_{-1} \quad ; \quad \vec{x}_{-2}$$

No podemos utilizar la ecuación (64) para encontrar

$$\bullet \vec{x}_1 \quad ; \quad \vec{x}_2$$

Esto ocasiona que el método no sea de inicio automático. Para iniciarlo, podemos utilizar el método de diferencia central descrito anteriormente para hallar

$$\bullet \vec{x}_1 \quad ; \quad \vec{x}_2$$

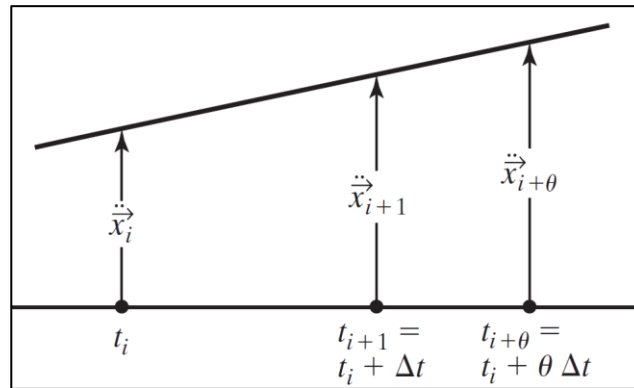
Una vez conocido \vec{x}_0 a partir de las condiciones iniciales dadas del problema y \vec{x}_1 , \vec{x}_2 conocidos a partir del método de diferencia central, las subsiguientes soluciones \vec{x}_3 , \vec{x}_4 , ... se pueden encontrar aplicando la ecuación (64).

c. Método de Wilson

Este método se basa en la suposición de que la aceleración varía linealmente

Figura 8

Suposición de aceleración lineal



Nota. cuadrícula equidistante tiempo VS desplazamiento. Adaptado de Rao (2012).

Si la aceleración varía linealmente con el tiempo entonces:

$$t_{i+\theta} = t_i + \theta \cdot \Delta t \quad (65)$$

Donde se supone que $\theta \geq 1,0$, pero este método es incondicionalmente estable siempre que $\theta \geq 1,37$.

Como la aceleración $\ddot{x}(t)$ varía linealmente podemos predecir el valor de \ddot{x} en cualquier instante de tiempo $t_i + \tau$, siempre que $0 \leq \tau \leq \theta$.

$$\ddot{x}(t_i + \tau) = \ddot{x}_i + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \quad (66)$$

Integramos la ecuación (66) dos veces para obtener $\dot{x}(t_i + \tau)$ y $x(t_i + \tau)$.

$$\dot{x}(t_i + \tau) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \quad (67)$$

$$x(t_i + \tau) = x_i + \dot{x}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta \Delta t} (\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \quad (68)$$

Hacemos la sustitución de $\tau = \theta \Delta t$ en las ecuaciones (67) y (68), resulta:

$$\dot{x}_{i+\theta} = \dot{x}(t_i + \theta \Delta t) = \dot{x}_i + \frac{\theta \Delta t}{2} (\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \quad (69)$$

$$\vec{x}_{i+\theta} = \vec{x}(t_i + \theta\Delta t) = \vec{x}_i + \theta\Delta t\dot{\vec{x}}_i + \frac{\theta^2(\Delta t)^2}{6}(\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} + 2\ddot{\vec{x}}_i) \quad (70)$$

Ahora despejamos $\ddot{\vec{x}}_{i+\theta}$ en la ecuación (70) y obtenemos

$$\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} = \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{\vec{x}}_i - 2\ddot{\vec{x}}_i \quad (71)$$

Reemplazamos la ecuación (71) en la ecuación (69) resulta:

$$\dot{\vec{x}}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}(\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - 2\dot{\vec{x}}_i - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\vec{x}}_i \quad (72)$$

Ordenando la ecuación (45) para el instante de tiempo $t_{i+\theta} = t_i + \theta\Delta t$

$$[m]\ddot{\vec{x}}_{i+\theta} + [c]\dot{\vec{x}}_{i+\theta} + [k]\vec{x}_{i+\theta} = \vec{F}_{i+\theta} \quad (73)$$

Para obtener el vector de fuerza seguimos la suposición lineal de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{i+\theta} = \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) \quad (74)$$

Sustituimos las ecuaciones (71), (72) y (74) en la ecuación (73) y nos proporciona la ecuación de con la cual se obtiene \vec{x}_{i+1}

$$\left\{ \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\theta\Delta t}[c] + [k] \right\} \vec{x}_{i+1} = \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) + \left\{ \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\theta\Delta t}[c] \right\} \vec{x}_i + \left\{ \frac{6}{\theta\Delta t}[m] + 2[c] \right\} \dot{\vec{x}}_i + \left\{ 2[m] + \frac{\theta\Delta t}{2}[c] \right\} \ddot{\vec{x}}_i \quad (75)$$

Para facilitar el método se resuelve para \vec{x}_{i+1} de la siguiente manera

Determinamos el vector de carga efectivo $\vec{\tilde{F}}_{\theta+1}$

$$\vec{\tilde{F}}_{i+\theta} = \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) + [m] \left(\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} \vec{x}_i + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\vec{x}}_i + 2\ddot{\vec{x}}_i \right) + [c] \left(\frac{3}{\theta\Delta t} \vec{x}_i + 2\dot{\vec{x}}_i + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\vec{x}}_i \right) \quad (76)$$

Encontramos el vector desplazamiento para el instante $t_{i+\theta}$:

$$\vec{x}_{i+\theta} = \left[\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}[m] + \frac{3}{\theta\Delta t}[c] + [k] \right]^{-1} \cdot \vec{\tilde{F}}_{i+\theta} \quad (77)$$

Calculamos los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento en el tiempo t_{i+1} :

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{6}{\theta^3(\Delta t)^2}(\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - \frac{6}{\theta^2\Delta t}\dot{\vec{x}}_i - \left(1 - \frac{3}{\theta}\right)\ddot{\vec{x}}_i \quad (78)$$

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\vec{x}}_{i+1} - \ddot{\vec{x}}_i) \quad (79)$$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t \dot{\vec{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6} (\ddot{\vec{x}}_{i+1} + 2\ddot{\vec{x}}_i) \quad (80)$$

d. Método de Newmark

Para el método de Newmark también se tiene la suposición que la aceleración varía linealmente entre dos instantes de tiempo. Las ecuaciones resultantes para los vectores de Velocidad y desplazamiento se obtienen de forma similar a como en las ecuaciones (67) y (68).

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + [(1 - \beta)\ddot{\vec{x}}_i + \beta\ddot{\vec{x}}_{i+1}]\Delta t \quad (81)$$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t \dot{\vec{x}}_i + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{\vec{x}}_i + \alpha\ddot{\vec{x}}_{i+1}\right](\Delta t)^2 \quad (82)$$

Los parámetros α y β indican que tanto entra la aceleración en las ecuaciones de velocidad y desplazamiento al final del intervalo Δt .

Podemos seleccionar los valores de α y β para obtener los valores de estabilidad y precisión deseados

Cuando $\beta = 1/2$ y $\alpha = 1/6$, las ecuaciones (81) y (82) se corresponden al método de aceleración lineal de Newmark, que también sería el mismo si $\theta = 1$ en el método de Wilson.

Cuando $\beta = 1/2$ y $\alpha = 1/4$ las ecuaciones (81) y (82) se corresponden al método de Newmark considerando la suposición de aceleración constante.

Para determinar el valor de $\ddot{\vec{x}}_{i+1}$, la ecuación de equilibrio (45) se considera en el instante $t = t_{i+1}$, de modo que

$$[m]\ddot{\vec{x}}_{i+1} + [c]\dot{\vec{x}}_{i+1} + [k]\vec{x}_{i+1} = \vec{F}_{i+1} \quad (83)$$

Esta ecuación (82) la podemos utilizar para expresar $\ddot{\vec{x}}_{i+1}$ en función de \vec{x}_{i+1} y el resultado lo sustituimos en la ecuación (81) para poder expresar $\dot{\vec{x}}_{i+1}$ en función de \vec{x}_{i+1} .

Reemplazamos las expresiones obtenidas en la ecuación (83) y encontramos la ecuación para poder obtener el valor de \vec{x}_{i+1} :

$$\vec{x}_{i+1} = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \times \left\{ \vec{F}_{i+1} + [m] \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \vec{x}_i + \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\vec{x}}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\vec{x}}_i \right] + [c] \left[\frac{\beta}{\alpha\Delta t} \vec{x}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\vec{x}}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{\vec{x}}_i \right] \right\} \quad (84)$$

Para calcular los valores de velocidad y aceleración utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) - \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\vec{x}}_i - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\vec{x}}_i \quad (85)$$

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + (1 - \beta)\Delta t \ddot{\vec{x}}_i + \beta\Delta t \ddot{\vec{x}}_{i+1} \quad (86)$$

Este método es incondicionalmente estable si establecemos los valores de α y β de la siguiente manera:

$$\beta \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad \alpha \geq \frac{1}{4} \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (87)$$

2.2.3 Idealizar estructuras en modelos matemáticos

a. Matriz de rigidez lateral

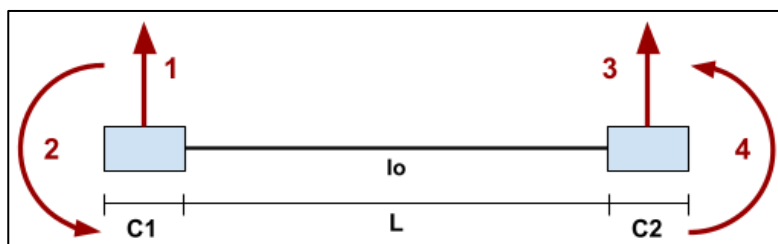
Primero calculamos la matriz de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales, posteriormente hallamos la matriz de rigidez total uniendo todas las matrices gracias a las coordenadas generalizadas y los vectores de posición de cada elemento. Una vez hallada la matriz de rigidez de la estructura tenemos que hacer la condensación para poder determinar la matriz de rigidez lateral.

Matriz de rigidez de un elemento viga:

Para calcular la matriz de rigidez de un elemento, lo calcularemos utilizando el modelo de nudos rígidos, como se muestra en la figura 9, con dos sectores de rigidez infinita c_1 y c_2 .

Figura 9

Elemento viga con dos sectores de rigidez infinita



Nota. Coordenadas locales para un elemento viga de longitud L , con dos sectores de rigidez infinita $C1$ y $C2$, los cuales ingresan en el nudo.

La matriz de rigidez de este elemento viga con sectores de rigidez infinita es una matriz simétrica y es la siguiente:

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} t & b + c_1 t & -t & b' + c_2 t \\ b + c_1 t & k + 2c_1 b + c_1^2 t & -(b + c_1 t) & a + c_1 b' + c_2 b + c_1 c_2 t \\ -t & -(b + c_1 t) & t & -(b' + c_2 t) \\ b' + c_2 t & a + c_1 b' + c_2 b + c_1 c_2 t & -(b' + c_2 t) & k' + 2c_2 b' + c_2^2 t \end{bmatrix} \quad (88)$$

Donde:

- $k = \frac{4(EI_0)}{L} \left[\frac{1+\emptyset}{1+4\emptyset} \right]$
- $k' = k$
- $a = \frac{2(EI_0)}{L} \left[\frac{1-2\emptyset}{1+4\emptyset} \right]$
- $b = \frac{6(EI_0)}{L^2} \left[\frac{1}{1+4\emptyset} \right]$
- $b' = b$
- $t = \frac{12(EI_0)}{L^3} \left[\frac{1}{1+4\emptyset} \right]$
- $\emptyset = \frac{3(EI_0)\beta}{(GA_0)L^2}$

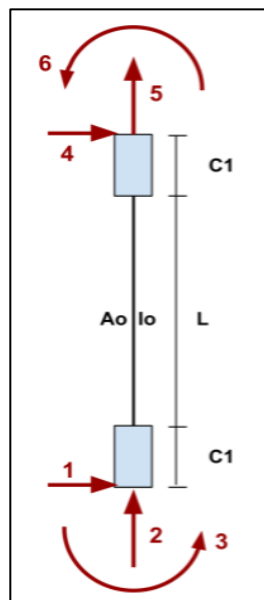
El módulo de elasticidad es E , β es un factor de forma por corte de la sección, G es el módulo de corte y I_0 , A_0 son la inercia a flexión de la sección y el área de la sección respectivamente.

Matriz de rigidez de un elemento columna:

Para calcular la matriz de rigidez de un elemento columna, lo calcularemos utilizando el modelo de nudos rígidos, como se muestra en la figura 10, con dos sectores de rigidez infinita c_1 y c_2 .

Figura 10

Elemento columna con dos sectores de rigidez infinita.



Nota. Coordenadas locales para un elemento Columna de longitud L, con dos sectores de rigidez infinita C1 y C2, los cuales ingresan en el nudo.

La matriz de rigidez de este elemento columna con sectores de rigidez infinita es una matriz simétrica y es la siguiente:

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} t & 0 & -(b + c_1 t) & -t & 0 & -(b' + c_2 t) \\ 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 \\ -(b + c_1 t) & 0 & k + 2c_1 b + c_1^2 t & b + c_1 t & 0 & a + c_1 b' + c_2 b + c_1 c_2 t \\ -t & 0 & b + c_1 t & t & 0 & b' + c_2 t \\ 0 & -r & 0 & 0 & r & 0 \\ -(b' + c_2 t) & 0 & a + c_1 b' + c_2 b + c_1 c_2 t & b' + c_2 t & 0 & k' + 2c_2 b' + c_2^2 t \end{bmatrix} \quad (89)$$

Donde:

- $k = \frac{4(EI_0)}{L} \left[\frac{1+\emptyset}{1+4\emptyset} \right]$
- $k' = k$
- $a = \frac{2(EI_0)}{L} \left[\frac{1-2\emptyset}{1+4\emptyset} \right]$
- $b = \frac{6(EI_0)}{L^2} \left[\frac{1}{1+4\emptyset} \right]$
- $b' = b$
- $t = \frac{12(EI_0)}{L^3} \left[\frac{1}{1+4\emptyset} \right]$
- $r = \frac{EA_0}{L}$
- $\emptyset = \frac{3(EI_0)\beta}{(GA_0)L^2}$

El módulo de elasticidad es E , β es un factor de forma por corte de la sección, G es el módulo de corte y I_0, A_0 son la inercia a flexión de la sección y el área de la sección respectivamente.

Condensación de la matriz de rigidez:

La condensación estática de la matriz de rigidez, es la base sobre la que trabaja el análisis sísmico de estructuras.

Para el análisis de pórticos planos y considerando pisos rígidos solo tendremos un desplazamiento lateral por piso, el cual serán las coordenadas principales, tantos como pisos tenga la estructura y todas las demás serán las coordenadas secundarias.

La matriz de rigidez de la estructura estará particionada de la siguiente manera.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \quad (90)$$

Finalmente, la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales "a" resulta:

$$[K]_L = [K]_{aa} - [K]_{ab}[K]_{bb}^{-1}[K]_{ba} \quad (91)$$

b. Matriz de masas

Usamos el modelo de masas puntuales concentradas, en el cual la matriz de masas es una diagonal con elementos de masa por cada piso de la estructura, ya que consideramos las vigas axialmente rígidas y columnas flexibles.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_i & \\ & & & & m_n \end{bmatrix} \quad (92)$$

Donde:

- m_i : es la masa total del piso i
- m_n : es la masa del último piso

c. Modos de vibración natural

Las vibraciones libres son las vibraciones en las cuales no existe un amortiguamiento en el sistema, veremos que la solución de este sistema conduce a la obtención de valores y vectores propios los mismos que nos facilitan encontrar las frecuencias naturales y los modos de vibración respectivamente.

La ecuación que gobierna las vibraciones libres sin amortiguamiento ni fuerza excitadora es la ecuación siguiente:

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = 0 \quad (93)$$

Planteamos una solución:

$$\vec{x}(t) = [\Phi] \cdot \vec{q}(t) \quad (94)$$

Donde $[\Phi]$ es una matriz que no depende del tiempo y que contiene los vectores propios y q es una función del tiempo por determinar.

Derivamos dos veces la ecuación (94) resulta:

$$\dot{\vec{x}} = [\Phi] \dot{\vec{q}} \quad (95)$$

$$\ddot{\vec{x}} = [\Phi] \ddot{\vec{q}} \quad (96)$$

Reemplazamos las ecuaciones (95) y (96) en la ecuación (93), obtenemos:

$$[M][\Phi]\ddot{\vec{q}} + [K][\Phi]\vec{q} = 0 \quad (97)$$

Dividiendo (97) entre q :

$$[\Phi] \left[[K] + \left(\frac{\ddot{\vec{q}}}{\vec{q}} \right) [M] \right] = 0 \quad (98)$$

Hacemos (\ddot{q}/q) igual a $\vec{\lambda}$ tenemos:

$$\ddot{\vec{q}} - \vec{\lambda}\vec{q} = 0 \quad (99)$$

Y la ecuación (98) resulta:

$$[\Phi] \left[[K] + \vec{\lambda}[M] \right] = 0 \quad (100)$$

Obtenemos el valor de $\vec{\lambda}$ evaluando la ecuación (99) y después determinamos los modos de vibración $[\Phi]$ evaluando la ecuación (100)

d. Matriz de amortiguamiento

Para calcular la matriz de amortiguamiento usamos el modelo de Rayleigh, desarrollando el algoritmo de Wilson y Penzien, el cual usa los vectores propios y frecuencias de los modos; se calculan las contribuciones de amortiguamiento por cada modo y finalmente la suma de todos ellos dará el amortiguamiento final de la estructura.

$$[C]_i = \frac{2\xi_i W n_i}{M_i^*} ([M]\vec{\phi}_i)(\vec{\phi}_i^T [M]) \quad (101)$$

Siendo $\vec{\phi}_i$, el vector de modo de vibración i . finalmente obtenemos la matriz de amortiguamiento sumando las contribuciones de la siguiente manera:

$$[C] = \sum_{i=1}^n [C]_i \quad (102)$$

2.2.4 Respuesta dinámica de modelos matemáticos

Para obtener la respuesta dinámica del modelo de la estructura cuando es sometido a unas condiciones iniciales, será resolviendo la ecuación diferencial de una vibración libre amortiguada.

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \mathbf{0} \quad (103)$$

Desacoplamiento del sistema de ecuaciones:

El sistema de ecuaciones diferenciales para vibración libre amortiguado (103) está acoplado, esto porque las matrices de rigidez y amortiguamiento no son diagonales, utilizamos un mecanismo de diagonalización por medio de un cambio de variable.

$$\vec{x} = [\Phi]\vec{q} \quad (104)$$

Donde $[\Phi]$ es la matriz modal, que tiene como vectores columna a los distintos modos de vibración de la estructura, esta matriz modal nos permite pasar de las coordenadas \vec{x} a las coordenadas \vec{q} , obtenemos.

$$[M]^*\ddot{\vec{q}} + [C]^*\dot{\vec{q}} + [K]^*\vec{q} = [Q]^* \quad (105)$$

$$[M]^* = [\Phi]^T[M][\Phi] \quad (106)$$

$$[C]^* = [\Phi]^T[C][\Phi] \quad (107)$$

$$[K]^* = [\Phi]^T[K][\Phi] \quad (108)$$

$$[Q]^* = [\Phi]^T[Q] \quad (109)$$

Luego de realizado el cambio de variable (104), las matrices $[M]^*$, $[C]^*$, $[K]^*$ y $[Q]^*$ son matrices diagonalizadas de tal manera que tenemos un conjunto de ecuaciones desacopladas que pueden resolverse independientemente.

Superposición modal:

El vector desplazamiento $\vec{x}(t)$ resulta ser la combinación lineal de las soluciones desacopladas, aplicando el respectivo cambio de variable (104):

$$\vec{x}(t) = [\Phi]\vec{q}(t) \quad (110)$$

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

3.1 Tipo y Nivel de la investigación

Dado que el objetivo del estudio es determinar el método numérico más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras, esta investigación está enmarcada en el paradigma cuantitativo, que según (Hernández et al., 2014). Representa un conjunto de procesos secuencial y probatorio, miden variables en un determinado contexto; se analizan las mediciones obtenidas utilizando métodos estadísticos y se extrae una serie de conclusiones.

El alcance o nivel de nuestra investigación es del tipo explicativo demostrativo, que según (Hernández et al., 2014). Está dirigido a responder por las causas de los eventos y fenómenos físicos o sociales. Se enfoca en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se manifiesta, o por qué se relacionan las variables.

3.2 Población y muestra de estudio

3.2.1 Población

La población motivo de esta investigación está conformada por los métodos numéricos que son utilizados para obtener la respuesta dinámica de estructuras, los cuales se muestran a continuación.

- Método de Bate
- Método de Adams
- Método de Euler
- Método de PIM
- Método de Diferencia Central
- Método de Runge Kutta
- Método de Newmark
- Método de Wilson
- Método de Houbolt

3.2.2 Muestra

La muestra que utilizamos para esta investigación son los Métodos Numéricos que por conveniencia se ha tomado solo una muestra de los más utilizados orientados a problemas de dinámica para solucionar ecuaciones diferenciales y se muestran a continuación.

- Método de Diferencia Central
- Método de Newmark
- Método de Wilson
- Método de Houbolt

3.3 Operacionalización de variables

La operacionalización de variables se muestra en la Tabla 1, se realizó para la hipótesis general, para mejor comprensión véase el anexo 1.

Tabla 1

Operacionalización de variables

Hipótesis	Variable	Definición Operacional	Dimensiones	Und.
Evaluando los diferentes métodos numéricos, se obtiene el método más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad.	VI: Métodos Numéricos	Los diferentes métodos numéricos son calculados con mismo intervalo de tiempo, para poder evaluarlos necesitamos conocer primero más matrices de masa concentrada, Rigidez y el amortiguamiento para la estructura	Masa concentrada	kg
			Rigidez	---
			Amortiguamiento	---
			Incremento tiempo	s
	VD: Respuesta Dinámica de estructuras	Se obtiene mediante la aplicación de un método numérico tomando como aceleración un registro sísmico obteniéndose los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en intervalos discretos de tiempo	Desplazamientos	m
			Velocidades	m/s
			Aceleraciones	m/s ²

Nota. el cuadro muestra la operacionalización de variable independiente y variable dependiente

3.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Las técnicas utilizadas para esta investigación son las siguientes:

- Observación directa de modelos matemáticos
- Revisión bibliográfica sobre métodos numéricos

Los instrumentos utilizados son:

- Fichas de recolección de datos
- Tablas y gráficas
- Lenguaje de programación PYTHON

Tabla 2

Tabla para evaluación de métodos numéricos

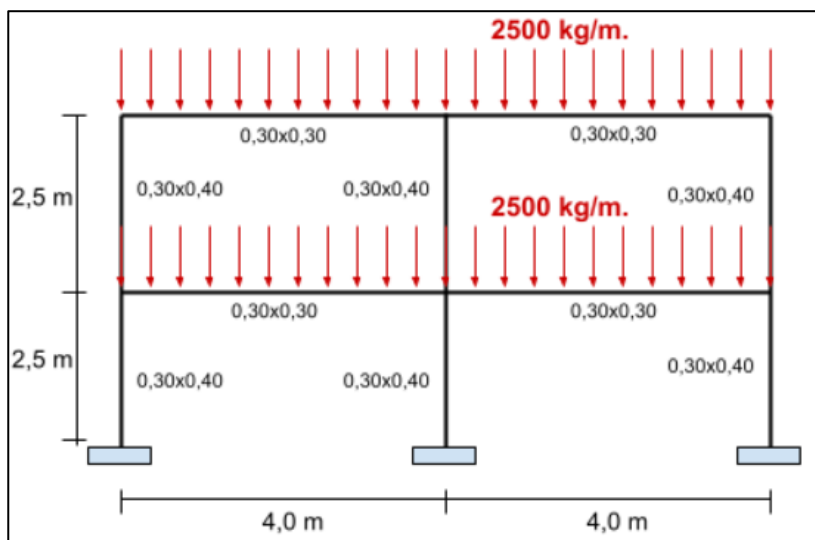
Métodos Numéricos	Desviación Estándar		
	$\Delta t=0,030$	$\Delta t=0,022$	$\Delta t=0,010$
Diferencia Central			
Houbolt			
Wilson			
Newmark			

Nota. el cuadro muestra la tabla usada para comparar los métodos, usando para ello la desviación estándar de los datos de error obtenidos.

3.5 Procesamiento y análisis de datos

3.5.3 Modelamiento de una estructura

Estructura sobre la cual trabajamos

Figura 11*Pórtico de dos pisos para el análisis*

Nota. Pórtico de dos pisos, columnas de 0,30x0,40 y vigas de 0,30x0,30, tiene una sobrecarga por piso de 2500 kg/m, la altura de los pisos es de 2,5 m y los vanos de 4 m.

Datos y suposiciones del modelo:

En primer lugar, para hacer nuestro estudio de análisis dinámico utilizamos un modelo de la estructura en estudio, en nuestro caso para realizar este modelo tomamos en consideración ciertas características y parámetros sobre los cuales modelamos nuestra estructura (pórtico).

- Trabajaremos en el rango elástico
- Consideramos pisos rígidos
- Vigas axialmente rígidas
- Columnas totalmente flexibles
- Usamos el modelo de masas concentradas

Para el desarrollo de esta primera parte, primero calculamos las propiedades del pórtico como matriz de rigidez, matriz de masas, y matriz de amortiguamiento

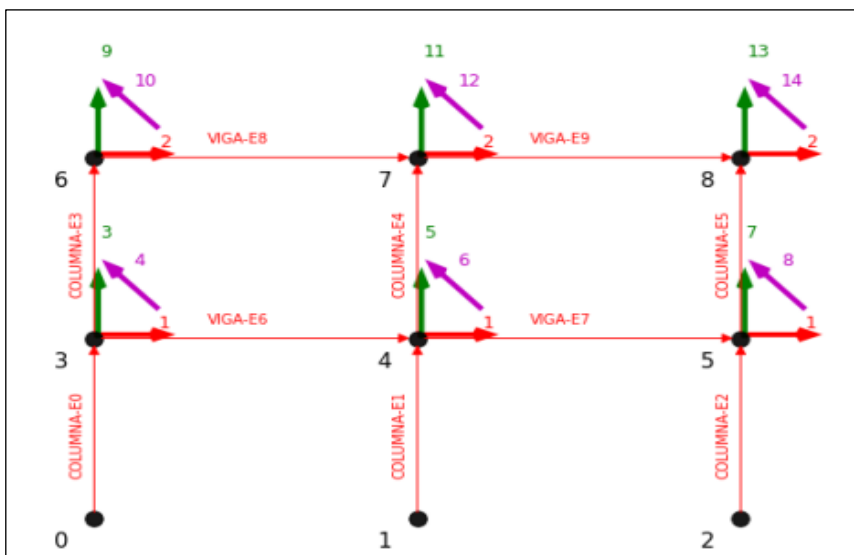
Matriz de rigidez lateral:

Para obtener la matriz de rigidez lateral de nuestra estructura primero obtenemos la matriz de coordenadas generalizadas (CG); los Vectores de Colocación (VC); con los cuales formamos la matriz de rigidez de la estructura usando el ensamble directo y finalmente aplicamos la condensación estática.

Al considerar vigas axialmente rígidas y columnas totalmente flexibles colocamos los grados de libertad en todos los nudos, al ser vigas axialmente rígidas existe un solo desplazamiento por piso de tal manera que numeramos primero los desplazamientos horizontales de cada piso sobre los cuales más adelante se realizara la condensación estática y luego numeramos los grados de libertad restantes como se muestra en la Figura 12.

Figura 12

Numeración de nudos y grados de libertad



Nota. Numeración de los nudos y grados de libertad

Al considerar pisos rígidos solo se tiene un grado de libertad horizontal por cada piso. Del cual nuestra matriz de Coordenadas Generalizadas resulta:

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 10 \\ 2 & 11 & 12 \\ 2 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación resultan de agrupar los 3 grados de libertad del nudo inicial con los 3 grados de libertad del nudo final de cada elemento

$$VC(E0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 4]$$

$$VC(E1) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5 \ 6]$$

$$VC(E2) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 7 \ 8]$$

$$VC(E3) = [1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 9 \ 10]$$

$$VC(E4) = [1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 11 \ 12]$$

$$VC(E5) = [1 \ 7 \ 8 \ 2 \ 13 \ 14]$$

$$VC(E6) = [1 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 6]$$

$$VC(E7) = [1 \ 5 \ 6 \ 1 \ 7 \ 8]$$

$$VC(E8) = [2 \ 9 \ 10 \ 2 \ 11 \ 12]$$

$$VC(E9) = [2 \ 11 \ 12 \ 2 \ 13 \ 14]$$

Calculamos la rigidez de cada elemento en coordenadas globales utilizando las ecuaciones (88) y (89) y ensamblamos la matriz de rigidez utilizando para ello los vectores de colocación.

La matriz resultante del ensamble es una matriz de 14x14

$$[K] = \begin{bmatrix} 17150,3 & -8575,2 & 0,0 & -428,8 & 0,0 & -428,8 & 0,0 & -428,8 & 0,0 & 3787,4 & 0,0 & 3787,4 & 0,0 & 3787,4 \\ -8575,2 & 8575,2 & 0,0 & -3358,6 & 0,0 & -3358,6 & 0,0 & -3358,6 & 0,0 & -3787,4 & 0,0 & -3787,4 & 0,0 & -3787,4 \\ 0,0 & 0,0 & 214825,2 & 714,3 & -357,1 & 714,3 & 0,0 & 0,0 & -107234,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -428,8 & -3358,6 & 714,3 & 13646,5 & -714,3 & 1034,8 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3020,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & -357,1 & -714,3 & 215182,4 & 0,0 & -357,1 & 714,3 & 0,0 & 0,0 & -107234,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -428,8 & -3358,6 & 714,3 & 1034,8 & 0,0 & 15468,8 & -714,3 & 1034,8 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3020,4 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -357,1 & -714,3 & 214825,2 & -714,3 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -107234,0 & 0,0 \\ -428,8 & -3358,6 & 0,0 & 0,0 & 714,3 & 1034,8 & -714,3 & 13646,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3020,4 \\ 0,0 & 0,0 & -107234,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 107591,2 & 714,3 & -357,1 & 714,3 & 0,0 & 0,0 \\ 3787,4 & -3787,4 & 0,0 & 3020,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 714,3 & 8270,4 & -714,3 & 1034,8 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -107234,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -357,1 & -714,3 & 107948,3 & 0,0 & -357,1 & 714,3 \\ 3787,4 & -3787,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3020,4 & 0,0 & 0,0 & 714,3 & 1034,8 & 0,0 & 10092,7 & -714,3 & 1034,8 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -107234,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -357,1 & -714,3 & 107591,2 & -714,3 \\ 3787,4 & -3787,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3020,4 & 0,0 & 0,0 & 714,3 & 1034,8 & -714,3 & 8270,4 \end{bmatrix}$$

Ahora condensamos la matriz de rigidez a las coordenadas laterales de piso utilizando la ecuación (91).

$$[\mathbf{K}_{condensada}] = [\mathbf{K}]_{aa} - [\mathbf{K}]_{ab}[\mathbf{K}]_{bb}^{-1}[\mathbf{K}]_{ba}$$

$$[\mathbf{K}_{condensada}] = \begin{bmatrix} 12321,442 & -4989,115 \\ -4989,115 & 3271,485 \end{bmatrix}$$

De ahora en adelante la matriz $[\mathbf{K}_{condensada}]$ que representa la matriz de rigidez lateral de nuestra estructura la llamaremos simplemente $[\mathbf{K}]$.

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 12321,442 & -4989,115 \\ -4989,115 & 3271,485 \end{bmatrix}$$

Matriz de masas:

Usamos el modelo de masas puntuales concentradas, en el cual la matriz de masas es una diagonal con elementos de masa por cada piso de la estructura. Para nuestro caso tenemos dos pisos, multiplicamos la carga repartida por la longitud total 8m. y dividimos por el valor de la gravedad.

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix}$$

Modos de vibración natural:

Para obtener los modos de vibración primero tenemos que obtener los valores y vectores propios según la ecuación (100), para que existan soluciones fuera de la obvia ($[\Phi] = 0$) el determinante de $|\mathbf{K} + \lambda[\mathbf{M}]|$ tiene que ser igual a 0:

$$\det |[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]| = 0$$

$$[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 12321,442 & -4989,115 \\ -4989,115 & 3271,485 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 12321,442 - 2,041\lambda & -4989,115 \\ -4989,115 & 3271,485 - 2,041\lambda \end{bmatrix}$$

$$|[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]| = [(12321,442 - 2,041\lambda) * (3271,485 - 2,041\lambda)] - [(-4989,115)^2] = 0$$

$$P(\lambda) = 4,165681\lambda^2 - 31825,164\lambda + 15418144,2 = 0$$

Los valores propios resultan ser:

$$\lambda_1 = 519,834836 \quad \lambda_2 = 7120,01186$$

Con los valores propios determinados ahora calculamos las frecuencias naturales y periodos de vibración:

$$\vec{W}_n = \sqrt{\vec{\lambda}} = \sqrt{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 22,8 \\ 84,38 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = \frac{2\pi}{\vec{W}_n} = \begin{bmatrix} 0,28 \\ 0,07 \end{bmatrix}$$

Los valores propios están relacionados con cada uno de los modos de vibración los cuales son adimensionales.

Calculamos el primer modo de vibración $\vec{\phi}_1$:

$$[[\mathbf{K}] - \lambda_1[\mathbf{M}]] \cdot \vec{\phi}_1 = \mathbf{0}$$

Si $\vec{\phi}_1$ es un vector de la forma:

$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Operamos

$$[\mathbf{K}] - \lambda_1[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 12321,442 & -4989,115 \\ -4989,115 & 3271,485 \end{bmatrix} - (519,83) \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] - \lambda_1[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 11260,469 & -4989,115 \\ -4989,115 & 2210,512 \end{bmatrix}$$

$$[[\mathbf{K}] - \lambda_1[\mathbf{M}]] \cdot \vec{\phi}_1 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 11260,469 & -4989,115 \\ -4989,115 & 2210,512 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aparentemente es un sistema de ecuaciones, pero al trabajar con vectores propios tenemos la característica de que una de las ecuaciones es un múltiplo de la otra, por lo tanto, existen un conjunto de soluciones para a y b

Si hacemos a=1, resulta:

$$\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,257 \end{bmatrix}$$

Para tener un conjunto de soluciones representativo en todos los casos se normalizan los vectores propios de la siguiente manera:

$$\vec{\Phi}_i = \sqrt{\frac{1}{\phi_i^T M \phi_i}} \cdot \vec{\phi}_i$$

$$\vec{\Phi}_1 = \sqrt{\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2,257 \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} 1 \\ 2,257 \end{bmatrix}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2,257 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2835 \\ 0,6399 \end{bmatrix}$$

Hacemos lo mismo para λ_2 y obtenemos el segundo modo de vibración $\vec{\Phi}_2$

$$\vec{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,2835 \\ 0,6399 \end{bmatrix} \quad \vec{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 0,6399 \\ -0,2835 \end{bmatrix}$$

Matriz de amortiguamiento:

Para calcular la matriz de amortiguamiento usamos el modelo de Rayleigh, desarrollando el algoritmo de Wilson y Penzien, el cual usa los vectores propios y frecuencias de los modos; para todos los casos el valor de $\xi_i = 0,05$, para calcular utilizaremos la ecuación (101).

Los vectores propios ya fueron calculados y son:

$$\vec{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,2835 \\ 0,6399 \end{bmatrix} \quad \vec{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 0,6399 \\ -0,2835 \end{bmatrix}$$

$$M_1^* = \vec{\Phi}_1^T [M] \vec{\Phi}_1 = 1 \quad M_2^* = \vec{\Phi}_2^T [M] \vec{\Phi}_2 = 1$$

Modo 1:

$$\frac{2\xi_1 W n_1}{M_1^*} = \frac{2 * 0,05 * 22,8}{1} = 2,28$$

$$[C]_1 = \begin{bmatrix} 0,7636 & 1,7235 \\ 1,7235 & 3,8899 \end{bmatrix}$$

Modo 2:

$$\frac{2\xi_1 W n_1}{M_1^*} = \frac{2 * 0,05 * 84,38}{1} = 8,44$$

$$[C]_2 = \begin{bmatrix} 14,3957 & -6,3783 \\ -6,3783 & 3,8899 \end{bmatrix}$$

Sumamos las contribuciones de las matrices de amortiguamiento de cada modo

$$[C] = \begin{bmatrix} 15,1596 & -4,6549 \\ -4,6549 & 6,7159 \end{bmatrix}$$

3.5.4 Solución analítica del problema dinámico

Obtendremos la respuesta dinámica del modelo de la estructura cuando es sometido a unas condiciones iniciales, será una vibración libre amortiguado

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \mathbf{0}$$

Las condiciones iniciales en $t = 0$, el desplazamiento lateral para el primer piso es 1,5cm. y para el segundo piso es 2,5cm.

Desacoplamiento del sistema de ecuaciones:

Como podemos observar el sistema de ecuaciones diferenciales para vibración libre amortiguado está acoplado, utilizamos un mecanismo de diagonalización por medio de un cambio de variable, ecuación (104).

$$\vec{x} = [\Phi]\vec{q}$$

Donde $[\Phi]$ es la matriz modal y los vectores columna de esta matriz son los distintos modos de vibración de la estructura, esta matriz modal nos permite pasar de las coordenadas \vec{x} a las coordenadas \vec{q} , aplicamos los cambios de variable para la matriz de masas, amortiguamiento y rigidez de las ecuaciones (106) a (109).

Entonces aplicando en nuestro problema tenemos.

$$[M]^* = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 0,2835 & 0,6399 \\ 0,6399 & -0,2835 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2835 & 0,6399 \\ 0,6399 & -0,2835 \end{bmatrix}$$

$$[M]^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C]^* = \begin{bmatrix} 2,2799 & 0 \\ 0 & 8,4380 \end{bmatrix}$$

$$[K]^* = \begin{bmatrix} 519,8348 & 0 \\ 0 & 7120,0118 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver todas las matrices fueron diagonalizadas y es así como se desacopla la ecuación diferencial de varios grados de libertad. Luego de esto las ecuaciones desacopladas resultan.

$$[M]^* \ddot{\vec{q}} + [C]^* \dot{\vec{q}} + [K]^* \vec{q} = [Q]^*$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,2799 & 0 \\ 0 & 8,4380 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 519,8348 & 0 \\ 0 & 7120,0118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q}_1 + 2,2799\dot{q}_1 + 519,8348q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + 8,4380\dot{q}_2 + 7120,0118q_2 = 0$$

Estas ecuaciones diferenciales tienen como solución a la ecuación (44), para un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso.

Las condiciones iniciales están determinadas por los desplazamientos de la posición de equilibrio y las velocidades de las partículas en el instante de tiempo $T=0$.

$$x_1(0) = x_{01} = 0,015 \quad \dot{x}_1(0) = v_{01} = 0$$

$$x_2(0) = x_{02} = 0,025 \quad \dot{x}_2(0) = v_{02} = 0$$

Teniendo en cuenta la relación que existe entre $u(t)$ y $q(t)$

$$\vec{x}(0) = [\Phi]\vec{q}(0) \quad \rightarrow \quad \vec{q}(0) = [\Phi]^{-1}\vec{x}(0)$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = [\Phi]\dot{\vec{q}}(0) \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{q}}(0) = [\Phi]^{-1}\dot{\vec{x}}(0)$$

Para no calcular la inversa de la matriz modal ($[\Phi]^{-1}$), hacemos el siguiente artificio que es más conveniente.

$$[\Phi]^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\Phi] = [\mathbf{I}]$$

$$[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T [\mathbf{M}]$$

Ahora las condiciones iniciales se escriben en forma matricial de la siguiente manera:

$$\vec{q}(0) = [\Phi]^T [\mathbf{M}] \vec{x}(0)$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = [\Phi]^T [\mathbf{M}] \dot{\vec{x}}(0)$$

Aplicando en nuestro caso:

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,025 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{q}(0) = \begin{bmatrix} 0,2835 & 0,6399 \\ 0,6399 & -0,2835 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,025 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0,2835 & 0,6399 \\ 0,6399 & -0,2835 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}(0) = \begin{bmatrix} 0,0413 \\ 0,0051 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Superposición:

El desplazamiento $x_i(t)$ de cada piso, resulta de hacer la combinación lineal de las soluciones desacopladas, aplicando el respectivo cambio de variable:

$$\vec{x}(t) = [\Phi] \cdot \vec{q}(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2835 & 0,6399 \\ 0,6399 & -0,2835 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = 0,2835 \cdot q_1(t) + 0,6399 \cdot q_2(t)$$

$$x_2(t) = 0,6399 \cdot q_1(t) - 0,2835 \cdot q_2(t)$$

3.5.5 Solución numérica del problema dinámico

Realizaremos los cálculos de la solución numérica sobre el mismo problema planteado, supondremos valores discretos de tiempo.

Método de diferencia central:

Para que este método sea estable, debemos tomar un intervalo de tiempo menor que el intervalo de tiempo crítico.

$$\Delta t_{cri} = \frac{\tau_n}{\pi}$$

Donde τ_n es el periodo natural menor del sistema

En nuestro caso los periodos naturales calculados son:

$$\vec{T}_n = \frac{2\pi}{\vec{W}_n} = \begin{bmatrix} 0,28 \\ 0,07 \end{bmatrix}$$

$$\tau_n = 0,07 \quad \rightarrow \quad \Delta t_{cri} = \frac{0,07}{\pi} = 0,0223$$

Escogemos un intervalo de tiempo igual a $\Delta t = 0,022$

Las condiciones iniciales están determinadas por los desplazamientos de la posición de equilibrio y las velocidades de las partículas en el instante de tiempo $t=0$.

$$x_1(0) = x_{01} = 0,015 \quad \dot{x}_1(0) = v_{01} = 0$$

$$x_2(0) = x_{02} = 0,025 \quad \dot{x}_2(0) = v_{02} = 0$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,025 \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad \vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

El valor inicial para $\ddot{\vec{x}}_0$ se puede obtener de la siguiente manera utilizando para ello la ecuación (53):

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [M]^{-1}\{\vec{F} - [C]\dot{\vec{x}}_0 - [K]\vec{x}_0\} = \begin{bmatrix} -29,4433 \\ -3,4054 \end{bmatrix}$$

Y calculamos el valor de $\dot{\vec{x}}_{-1}$ usando la ecuación (55)

$$\dot{\vec{x}}_{-1} = \dot{\vec{x}}_0 - \Delta t \cdot \ddot{\vec{x}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\vec{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,0242 \end{bmatrix}$$

Ahora el método ya puede iniciar de forma recursiva calculando los valores de desplazamiento \vec{x}_{i+1} en cada iteración utilizando la ecuación (49), en la Tabla 3 se muestran algunos valores de las primeras seis iteraciones.

$$\vec{x}_{i+1} = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{1}{2\Delta t} [c] \right]^{-1} \left[\vec{F}_i - \left([k] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [m] \right) \vec{x}_i - \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} [m] - \frac{1}{2\Delta t} [c] \right) \vec{x}_{i-1} \right]$$

$$\vec{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,0242 \end{bmatrix}$$

Tabla 3

Primeras 6 iteraciones del método de Diferencia Central

Δt	\vec{x}_i	\vec{x}_{i-1}	\vec{F}_i	\vec{x}_{i+1}
0,000	[0,0150 0,0250]	[0,0079 0,0242]	[0,0 0,0]	[0,0079 0,0242]
0,022	[0,0079 0,0242]	[0,0150 0,0250]	[0,0 0,0]	[0,0067 0,0141]
0,044	[0,0067 0,0141]	[0,0079 0,0242]	[0,0 0,0]	[0,0025 0,0017]
0,066	[0,0025 0,0017]	[0,0067 0,0141]	[0,0 0,0]	[-0,0065 -0,0086]
0,088	[-0,0065 -0,0086]	[0,0025 0,0017]	[0,0 0,0]	[-0,0064 -0,0193]
0,110	[-0,0064 -0,0193]	[-0,0065 -0,0086]	[0,0 0,0]	[-0,0105 -0,0223]

Nota. Tabla con los valores de variables para las 6 primeras iteraciones del método de Diferencia Central.

Método de Houbolt:

Este método no es de inicio automático, para poder iniciarlo vamos a utilizar el método de Diferencia central que ya usamos para hallar $\vec{x}_{(1)}$ y $\vec{x}_{(2)}$

Igual que en el caso anterior usaremos el mismo incremento de tiempo de $\Delta t = 0,022$

Al igual que en el método de diferencia central, las condiciones iniciales están determinadas por los desplazamientos de la posición de equilibrio y las velocidades de las partículas en el instante de tiempo $t=0$.

$$x_1(0) = x_{01} = 0,015 \quad \dot{x}_1(0) = v_{01} = 0$$

$$x_2(0) = x_{02} = 0,025 \quad \dot{x}_2(0) = v_{02} = 0$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,025 \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad \vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

El valor inicial para $\ddot{\vec{x}}_0$ se puede obtener de la siguiente manera utilizando la ecuación (53):

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [M]^{-1} \{ \vec{F} - [C]\dot{\vec{x}}_0 - [K]\vec{x}_0 \} = \begin{bmatrix} -29,4433 \\ -3,4054 \end{bmatrix}$$

Y calculamos el valor de \ddot{x}_{-1} usando la ecuación (55)

$$\ddot{x}_{-1} = \ddot{x}_0 - \Delta t \cdot \dot{\ddot{x}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\ddot{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,0242 \end{bmatrix}$$

Este método no es de inicio automático y es por eso que tenemos que utilizar el método de diferencia central explicado antes para calcular los valores de $\vec{x}_{(1)}$ y $\vec{x}_{(2)}$.

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0,0150 \\ 0,0250 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,0242 \end{bmatrix}$$

Ahora el método ya puede iniciar de forma recursiva calculando los valores de desplazamiento \vec{x}_i en cada iteración a partir de $i=3$, usando la ecuación (64), en la Tabla 4 se muestran los valores para algunas iteraciones.

$$\vec{x}_{i+1} = \left[\frac{2}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{11}{6\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \left[\vec{F}_{i+1} + \left(\frac{5}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{3}{\Delta t} [c] \right) \vec{x}_i - \left(\frac{4}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{3}{2\Delta t} [c] \right) \vec{x}_{i-1} + \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} [m] + \frac{1}{3\Delta t} [c] \right) \vec{x}_{i-2} \right]$$

$$\vec{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0,0067 \\ 0,0141 \end{bmatrix}$$

Tabla 4

Primeras 6 iteraciones del método de Houbolt

Δt	\vec{x}_i	\vec{x}_{i-1}	\vec{x}_{i-2}	\vec{F}_i	\vec{x}_{i+1}
0,000	[0,0150 0,0250]	[0,0079 0,0242]	[0,0079 0,0242]	[0,0 0,0]	[0,0079 0,0242]
0,022	[0,0079 0,0242]	[0,0150 0,0250]	[0,0067 0,0141]	[0,0 0,0]	[0,0067 0,0141]
0,044	[0,0067 0,0141]	[0,0079 0,0242]	[0,0150 0,0250]	[0,0 0,0]	[0,0039 0,0014]
0,066	[0,0039 0,0014]	[0,0067 0,0141]	[0,0079 0,0242]	[0,0 0,0]	[-0,0021 -0,0098]
0,088	[-0,0021 -0,0098]	[0,0039 0,0014]	[0,0067 0,0141]	[0,0 0,0]	[-0,0082 -0,0181]
0,110	[-0,0082 -0,0181]	[-0,0021 -0,0098]	[0,0039 0,0014]	[0,0 0,0]	[-0,0113 -0,0226]

Nota. Tabla con los valores de variables para las 6 primeras iteraciones del método de Houbolt.

Método θ de Wilson:

Este método es incondicionalmente estable para valores de $\theta \geq 1,37$; consideramos el valor de 1,37. Igual que en el caso anterior usaremos el mismo incremento de tiempo de $\Delta t = 0,022$.

Al igual que en el método de diferencia central, las condiciones iniciales están determinadas por los desplazamientos de la posición de equilibrio y las velocidades de las partículas en el instante de tiempo $t=0$.

$$x_1(0) = x_{01} = 0,015 \quad \dot{x}_1(0) = v_{01} = 0$$

$$x_2(0) = x_{02} = 0,025 \quad \dot{x}_2(0) = v_{02} = 0$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,025 \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad \vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

El valor inicial para $\ddot{\vec{x}}_0$ se puede obtener de la siguiente manera utilizando la ecuación (53):

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [M]^{-1}\{\vec{F} - [C]\dot{\vec{x}}_0 - [K]\vec{x}_0\} = \begin{bmatrix} -29,4433 \\ -3,4054 \end{bmatrix}$$

Calculamos el vector de carga efectivo $\vec{F}_{i+\theta}$ utilizando la ecuación (76)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{i+\theta} = \vec{F}_i + \theta(\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i) + [m] \left(\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} \vec{x}_i + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\vec{x}}_i + 2\ddot{\vec{x}}_i \right) \\ + [c] \left(\frac{3}{\theta\Delta t} \vec{x}_i + 2\dot{\vec{x}}_i + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\vec{x}}_i \right) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{i+\theta} = \begin{bmatrix} 77,6317 \\ 320,1354 \end{bmatrix}$$

Calculamos el vector desplazamiento $\vec{x}_{i+\theta}$ para el instante $t_{i+\theta}$ utilizando la ecuación (77)

$$\vec{x}_{i+\theta} = \left[\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} [m] + \frac{3}{\theta\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \cdot \vec{F}_{i+\theta}$$

$$\vec{x}_{i+\theta} = \begin{bmatrix} 0,0073 \\ 0,0214 \end{bmatrix}$$

Calculamos los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento en el tiempo t_{i+1} , aplicando las ecuaciones (78), (79) y (80), en la Tabla 5 se muestran valores para algunas iteraciones del método.

$$\ddot{\vec{x}}_{i+1} = \frac{6}{\theta^3(\Delta t)^2} (\vec{x}_{i+\theta} - \vec{x}_i) - \frac{6}{\theta^2\Delta t} \dot{\vec{x}}_i - \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{\vec{x}}_i = \begin{bmatrix} -1,316 \\ -12,5359 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}_{i+1} = \dot{\vec{x}}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\vec{x}}_{i+1} - \ddot{\vec{x}}_i) = \begin{bmatrix} -0,3384 \\ -0,1754 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t \dot{\vec{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6} (\ddot{\vec{x}}_{i+1} + 2\ddot{\vec{x}}_i) = \begin{bmatrix} 0,0101 \\ 0,0234 \end{bmatrix}$$

Tabla 5*Primeras 6 iteraciones del método de Wilson*

Δt	\vec{F}_i	\vec{F}_{i+1}	\vec{x}_i	$\dot{\vec{x}}_i$	$\ddot{\vec{x}}_i$
0,000	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[0,015 0,025]	[0,00 0,00]	[-29,4433 -3,4054]
0,022	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[0,0101 0,0234]	[-0,3378 -0,1761]	[-1,2633 -12,6024]
0,044	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[0,0035 0,0165]	[-0,2205 -0,4563]	[11,9289 -12,8722]
0,066	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[0,0007 0,0043]	[-0,0755 -0,6119]	[1,2485 -1,2736]
0,088	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[-0,0015 -0,0086]	[-0,1516 -0,5208]	[-8,1633 9,5546]
0,110	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[-0,0062 -0,0176]	[-0,2462 -0,2932]	[-0,4419 11,1354]

Δt	$\vec{F}_{i+\theta}$	$\vec{x}_{i+\theta}$	$\ddot{\vec{x}}_{i+1}$	$\dot{\vec{x}}_{i+1}$	\vec{x}_{i+1}
0,000	[86,5838 334,5956]	[0,0075 0,0215]	[-1,2633 -12,6024]	[-0,3378 -0,1761]	[0,0101 0,0234]
0,022	[-9,1472 203,4718]	[0,0021 0,0123]	[11,9289 -12,8722]	[-0,2205 -0,4563]	[0,0035 0,0165]
0,044	[4,7707 -12,4727]	[0,0000 -0,0007]	[1,2485 -1,2736]	[-0,0755 -0,6119]	[0,0007 0,0043]
0,066	[-14,022 -201,4332]	[-0,0030 -0,0125]	[-8,1633 9,5546]	[-0,1516 -0,5208]	[-0,0015 -0,0086]
0,088	[-115,1823 -298,0292]	[-0,0081 -0,0197]	[-0,4419 11,1354]	[-0,2462 -0,2932]	[-0,0062 -0,0176]
0,110	[-191,5362 -320,9777]	[-0,0114 -0,022]	[10,9929 8,388]	[-0,1302 -0,0785]	[-0,0108 -0,0216]

Nota. Tabla con los valores de variables para las 6 primeras iteraciones del método de Wilson.

Método de Newmark:

Este método tiene dos parámetros β y α , estos valores pueden escogerse para obtener características de estabilidad y precisión que se desee, para este método se desea utilizar los valores de $\beta = 1/2$ y $\alpha = 1/8$.

Igual que en el caso anterior usaremos el mismo incremento de tiempo de $\Delta t = 0,022$

Al igual que en el método de diferencia central, las condiciones iniciales están determinadas por los desplazamientos de la posición de equilibrio y las velocidades de las partículas en el instante de tiempo $t=0$.

$$x_1(0) = x_{01} = 0,015 \quad \dot{x}_1(0) = v_{01} = 0$$

$$x_2(0) = x_{02} = 0,025 \quad \dot{x}_2(0) = v_{02} = 0$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,025 \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad \vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

El valor inicial para $\ddot{\vec{x}}_0$ se puede obtener de la siguiente manera usando la ecuación (53):

$$\ddot{\vec{x}}_0 = [M]^{-1} \{ \vec{F} - [C]\dot{\vec{x}}_0 - [K]\vec{x}_0 \} = \begin{bmatrix} -29,4433 \\ -3,4054 \end{bmatrix}$$

Ahora el método ya puede iniciar de forma recursiva calculando los valores de desplazamiento \vec{x}_i en cada iteración con la ecuación (84), en la Tabla 6 se muestran valores para las primeras iteraciones utilizadas en el método.

$$\vec{x}_{i+1} = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [m] + \frac{\beta}{\alpha\Delta t} [c] + [k] \right]^{-1} \times \left\{ \vec{F}_{i+1} + [m] \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \vec{x}_i + \frac{1}{\alpha\Delta t} \dot{\vec{x}}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\vec{x}}_i \right] + [c] \left[\frac{\beta}{\alpha\Delta t} \vec{x}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\vec{x}}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{\vec{x}}_i \right] \right\}$$

$$\vec{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0,0097 \\ 0,0235 \end{bmatrix}$$

Tabla 6

Primeras 6 iteraciones del método de Newmark

Δt	\vec{x}_i	$\dot{\vec{x}}_i$	$\ddot{\vec{x}}_i$	\vec{F}_i	\vec{x}_{i+1}
0,000	[0,015 0,025]	[0,0 0,0]	[-29,4433 -3,4054]	[0,0 0,0]	[0,0097 0,0235]
0,022	[0,0097 0,0235]	[-0,3148 -0,1923]	[0,8241 -14,076]	[0,0 0,0]	[0,0039 0,0159]
0,044	[0,0039 0,0159]	[-0,137 -0,5081]	[15,3388 -14,6322]	[0,0 0,0]	[0,0029 0,0023]
0,066	[0,0029 0,0023]	[-0,1038 -0,6131]	[-12,3202 5,0845]	[0,0 0,0]	[-0,0022 -0,0096]
0,088	[-0,0022 -0,0096]	[-0,3363 -0,4392]	[-8,8178 10,7295]	[0,0 0,0]	[-0,01 -0,0171]
0,110	[-0,01 -0,0171]	[-0,2187 -0,2837]	[19,5141 3,407]	[0,0 0,0]	[-0,0107 -0,0221]

Nota. Tabla con los valores de variables para las 6 primeras iteraciones del método de Newmark.

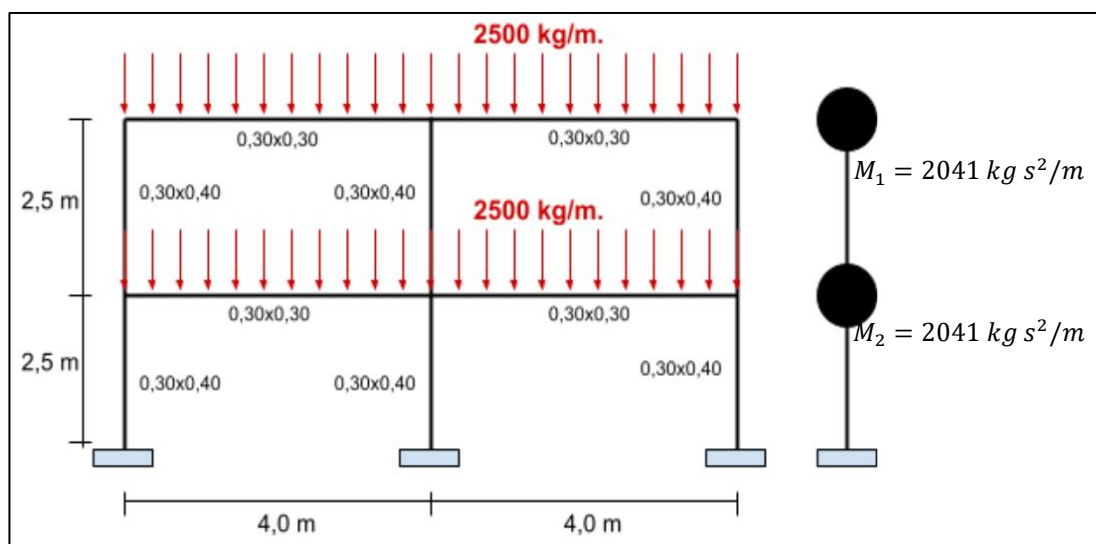
CAPÍTULO IV: RESULTADOS

4.1 Modelamiento de la estructura en estudio

El modelado de la estructura como se muestra en la Figura 13, se hizo considerando pisos rígidos, vigas y columnas con sectores de rigidez infinita (nudos rígidos).

Figura 13

Modelo dinámico de la estructura pórtico de 2 pisos



Nota. Se observa al lado derecho de la estructura su modelo matemático con masas concentradas.

$$[M] = \begin{bmatrix} 2,041 & 0,00 \\ 0,00 & 2,041 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 12321,442 & -4989,115 \\ -4989,115 & 3271,485 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 15,1596 & -4,6549 \\ -4,6549 & 6,7159 \end{bmatrix}$$

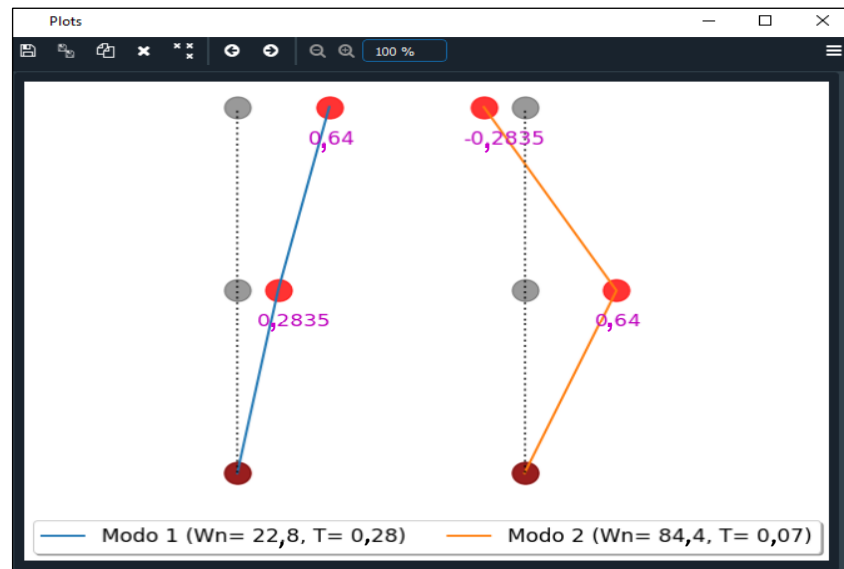
4.2 Modos de vibración

La matriz de modos del modelo de la estructura, es la siguiente y el gráfico de los modos se muestra en la Figura 14.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,2835 & 0,6399 \\ 0,6399 & -0,2835 \end{bmatrix}$$

Figura 14

Modos de vibración

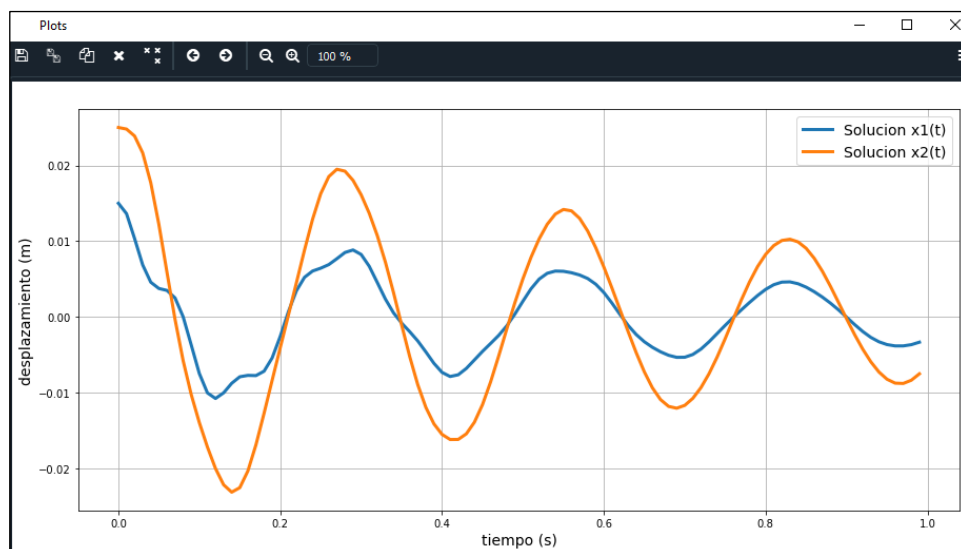


Nota. Se observa en el lado izquierdo el primer modo de la estructura en color azul y el segundo modo de vibración en color naranja del lado derecho.

4.3 Desplazamientos

Figura 15

Desplazamientos, Solución Analítica



Nota. Desplazamientos por piso, luego del acoplamiento directo.

4.4 Método de Diferencia Central

Realizamos los cálculos para encontrar los desplazamientos de los pisos del pórtico en estudio utilizando para ello el método de Diferencia central, algunos de los puntos calculados y sus valores de error se muestran en la Tabla 7 y en la Figura 16 podemos observar los valores discretos de desplazamiento.

Tabla 7

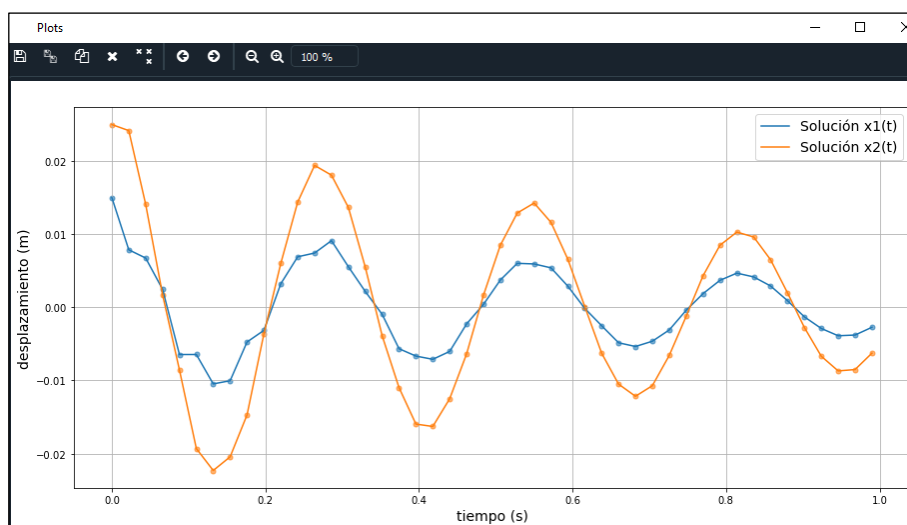
Desplazamientos del método de Diferencia Central

Δt	$x_1(t)$	error	$x_2(t)$	error
0,000	0,01500	0,00000	0,02500	0,00000
0,022	0,00787	0,00173	0,02418	-0,00062
0,044	0,00674	-0,00264	0,01410	0,00156
0,066	0,00247	0,00059	0,00174	0,00036
0,088	-0,00645	0,00354	-0,00856	-0,00087
0,110	-0,00645	-0,00358	-0,01931	0,00214

Nota. Tabla que muestra los primeros 6 valores de desplazamiento para el método de Diferencia Central.

Figura 16

Desplazamientos de cada piso método Diferencia Central



Nota. Los valores de desplazamiento son valores discretos a lo largo del tiempo, representados por puntos en la gráfica.

4.5 Método de Houbolt

Realizamos los cálculos para encontrar los desplazamientos de los pisos del pórtico en estudio utilizando para ello el método de Houbolt, algunos de los puntos calculados y sus valores de error se muestran en la Tabla 8 y en la Figura 17 podemos observar los valores discretos de desplazamiento.

Tabla 8

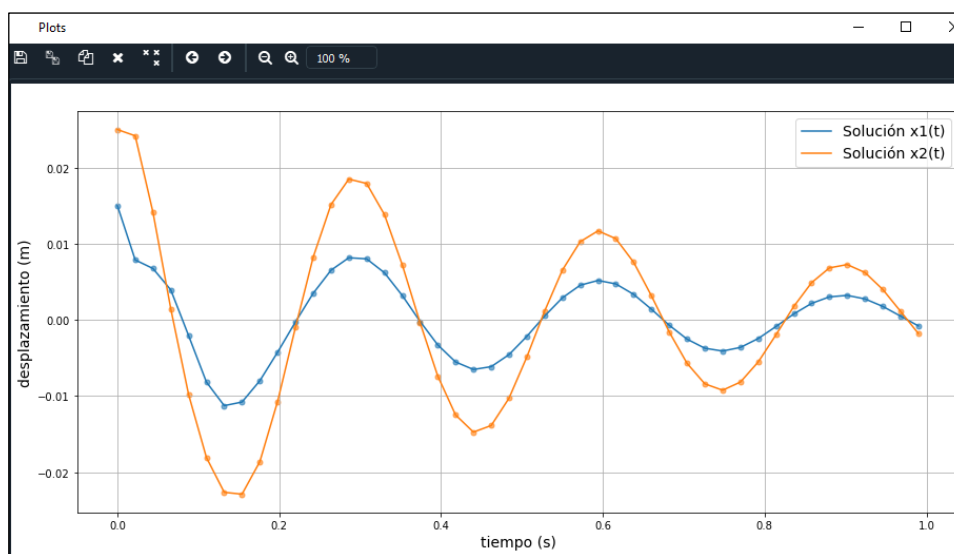
Desplazamientos del método de Houbolt

Δt	$x_1(t)$	error	$x_2(t)$	error
0,000	0,01500	0,00000	0,02500	0,00000
0,022	0,00787	0,00173	0,02418	-0,00062
0,044	0,00674	-0,00264	0,01410	0,00156
0,066	0,00393	-0,00087	0,00144	0,00066
0,088	-0,00207	-0,00083	-0,00981	0,00039
0,110	-0,00817	-0,00186	-0,01807	0,00090

Nota. Tabla que muestra los primeros 6 valores de desplazamiento para el método de Houbolt.

Figura 17

Desplazamientos de cada piso método de Houbolt



Nota. Los valores de desplazamiento son valores discretos a lo largo del tiempo, representados por puntos en la gráfica.

4.6 Método de Wilson

Realizamos los cálculos para encontrar los desplazamientos de los pisos del pórtico en estudio utilizando para ello el método de Wilson, algunos de los puntos calculados y sus valores de error se muestran en la Tabla 9 y en la Figura 18 podemos observar los valores discretos de desplazamiento.

Tabla 9

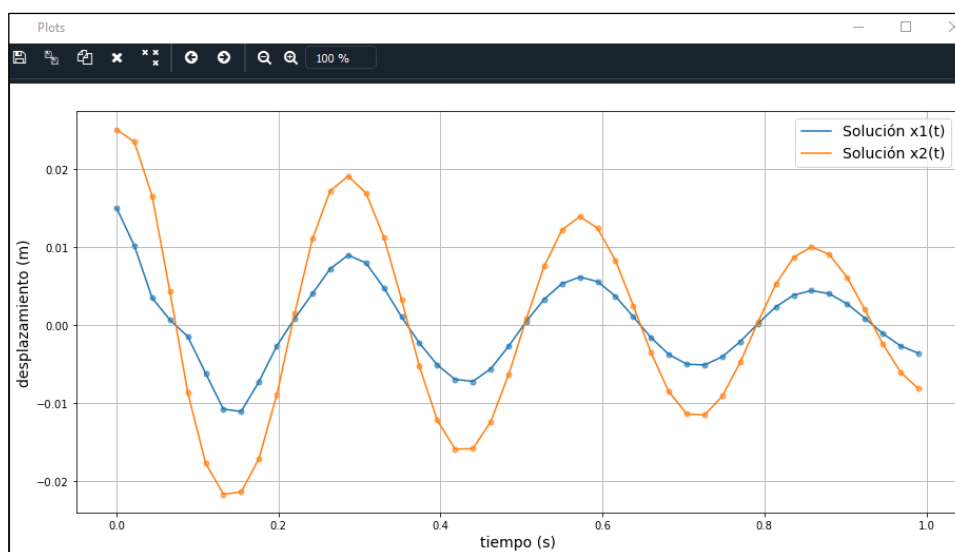
Desplazamientos del método de Wilson

Δt	$x_1(t)$	error	$x_2(t)$	error
0,000	0,01500	0,00000	0,02500	0,00000
0,022	0,01015	-0,00054	0,02343	0,00012
0,044	0,00348	0,00063	0,01649	-0,00082
0,066	0,00065	0,00241	0,00427	-0,00217
0,088	-0,00147	-0,00144	-0,00863	-0,00080
0,110	-0,00615	-0,00387	-0,01764	0,00047

Nota. Tabla que muestra los primeros 6 valores de desplazamiento para el método de Wilson. Fuente: Elaboración propia

Figura 18

Desplazamientos de cada piso método de Wilson



Nota. Los valores de desplazamiento son valores discretos a lo largo del tiempo, representados por puntos en la gráfica.

4.7 Método de Newmark

Realizamos los cálculos para encontrar los desplazamientos de los pisos del pórtico en estudio utilizando para ello el método de Newmark, algunos de los puntos calculados y sus valores de error se muestran en la Tabla 10 y en la Figura 19 podemos observar los valores discretos de desplazamiento.

Tabla 10

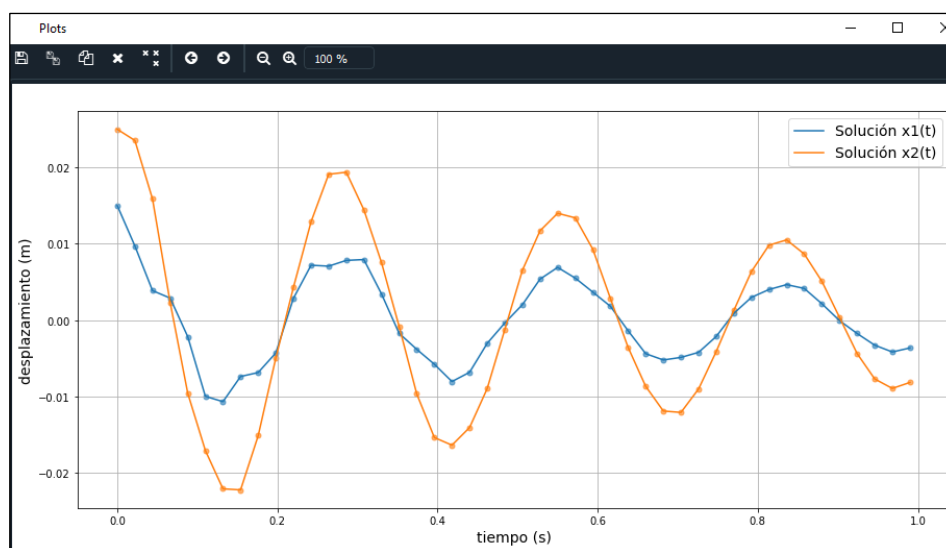
Desplazamientos del método de Newmark

Δt	$x_1(t)$	error	$x_2(t)$	error
0,000	0,01500	0,00000	0,02500	0,00000
0,022	0,00971	-0,00010	0,02353	0,00002
0,044	0,00386	0,00025	0,01586	-0,00020
0,066	0,00288	0,00018	0,00233	-0,00023
0,088	-0,00217	-0,00073	-0,00958	0,00016
0,110	-0,00999	-0,00004	-0,01709	-0,00008

Nota. Tabla que muestra los primeros 6 valores de desplazamiento para el método de Newmark. Fuente: Elaboración propia

Figura 19

Desplazamientos de cada piso método de Newmark



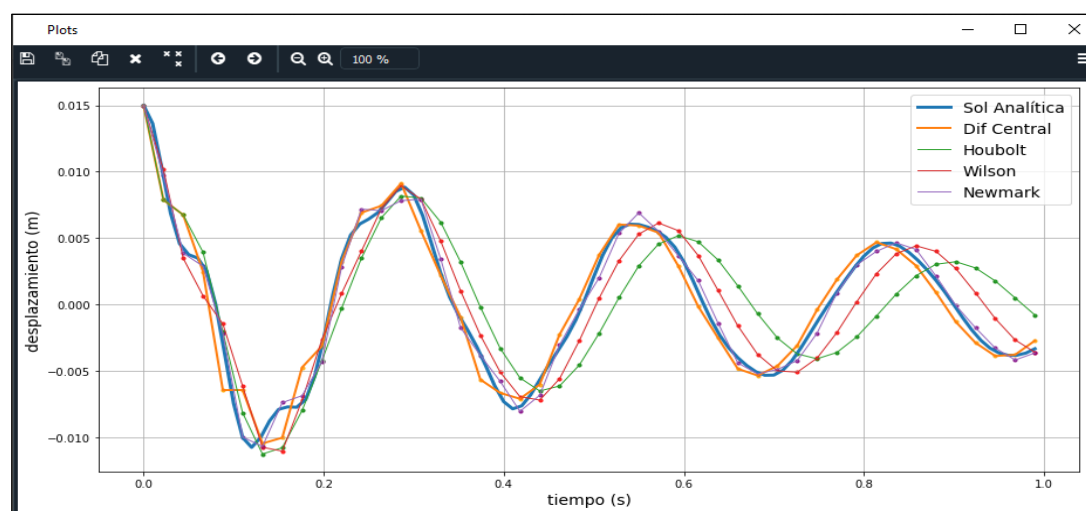
Nota. Los valores de desplazamiento son valores discretos a lo largo del tiempo, representados por puntos en la gráfica.

4.8 Análisis de los errores de los diferentes métodos Numéricos

Para poder determinar los errores, se hizo una diferencia de los desplazamientos para cada uno de los pisos punto por punto de la solución Analítica y la solución numérica las cuales se muestran en la Figura 20. Cuando el incremento de tiempo está definido como 0,022s.

Figura 20

Desplazamientos de solución analítica vs. soluciones numéricas



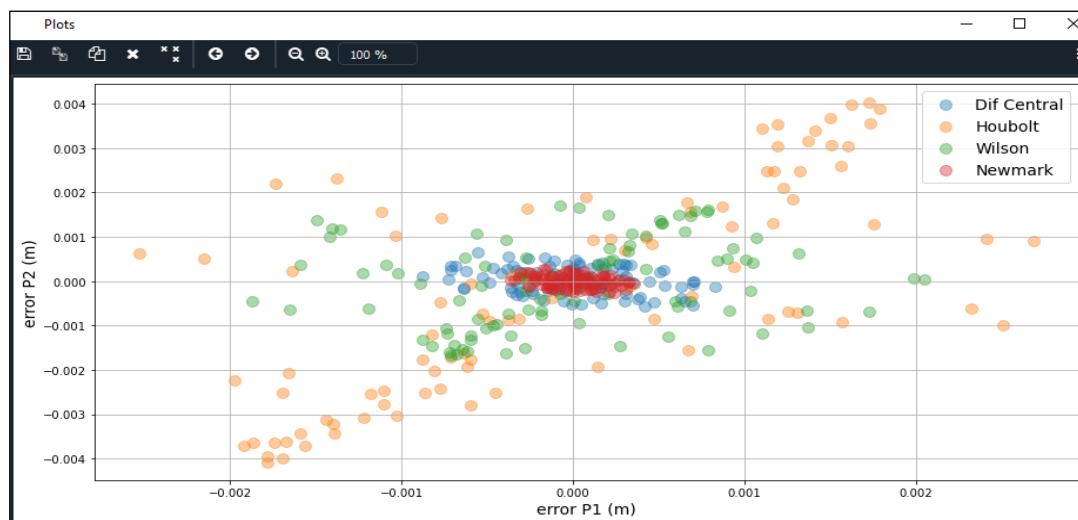
Nota. Se muestra en la imagen los desplazamientos correspondientes al primer piso de la solución analítica y las soluciones numéricas.

Habiendo encontrados los errores para cada uno de los métodos numéricos en estudio y para poder visualizar mejor los datos los dibujamos como un gráfico de dispersión de datos como se muestra en la Figura 21.

También realizamos un gráfico de histograma de frecuencias de los datos de error de cada método numérico y se observa mejor la distribución de frecuencia de cada uno como se muestra en la Figura 22.

Figura 21

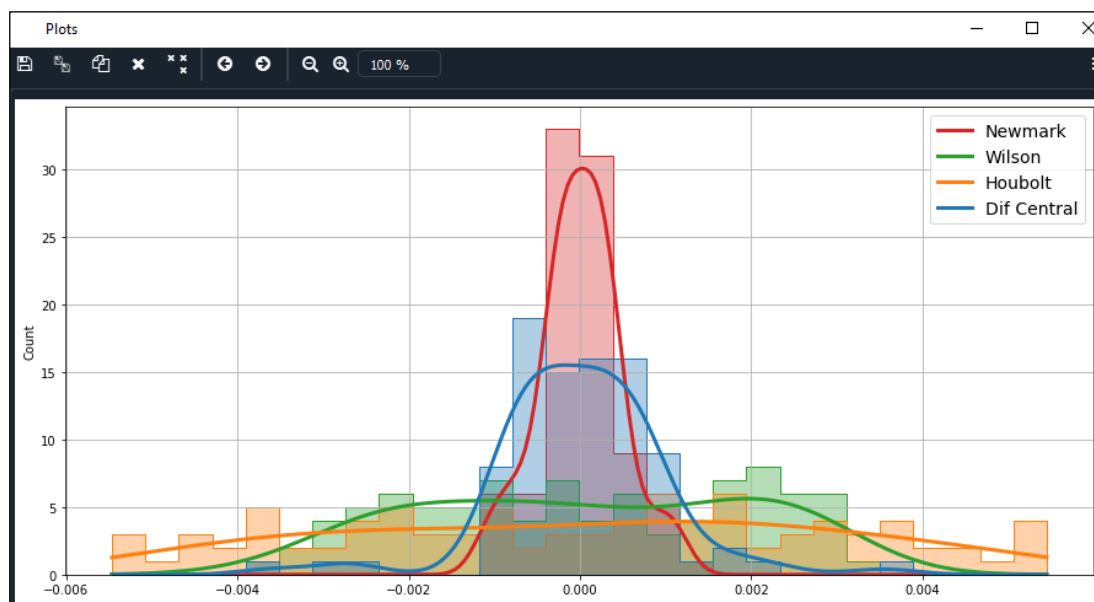
Dispersión de errores de los métodos numéricos



Nota. mostramos la dispersión de los errores del primer piso vs. el segundo piso

Figura 22

Histograma de errores de los métodos numéricos



Nota. Mostramos el histograma de frecuencias de los errores del primer piso

También realizamos la evaluación de la desviación estándar por cada uno de los métodos numéricos calculados y se muestran en la Tabla 11, resaltamos que las desviaciones se promedian para los errores de todos los pisos.

Tabla 11

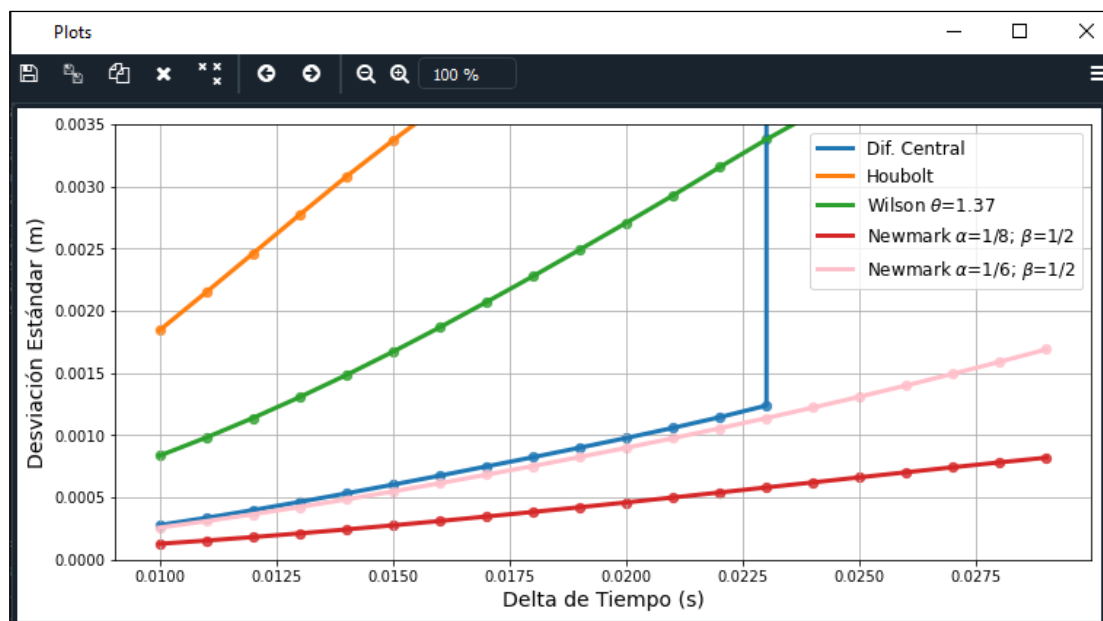
Desviación Estándar de los Errores de los Métodos

Métodos Numéricos	Desviación Estándar
	$\Delta t=0,022$
Diferencia Central	0,00114
Houbolt	0,00501
Wilson $\theta = 1,37$	0,00315
Newmark $\beta = 1/2 ; \alpha = 1/8$	0,00054

Nota. Esta tabla nos muestra las desviaciones obtenidas de promediar las desviaciones de los errores de cada uno de los pisos para un $\Delta t=0,022$

Figura 23

Delta de tiempo versus desviación estándar del error



Nota. se muestra las distintas desviaciones calculadas para varios deltas de tiempo

4.9 Análisis sísmico para un acelerograma

Ahora utilizaremos los métodos numéricos desarrollados para encontrar la respuesta en el tiempo de estructuras, utilizando para ello un registro sísmico.

Validación de los Métodos:

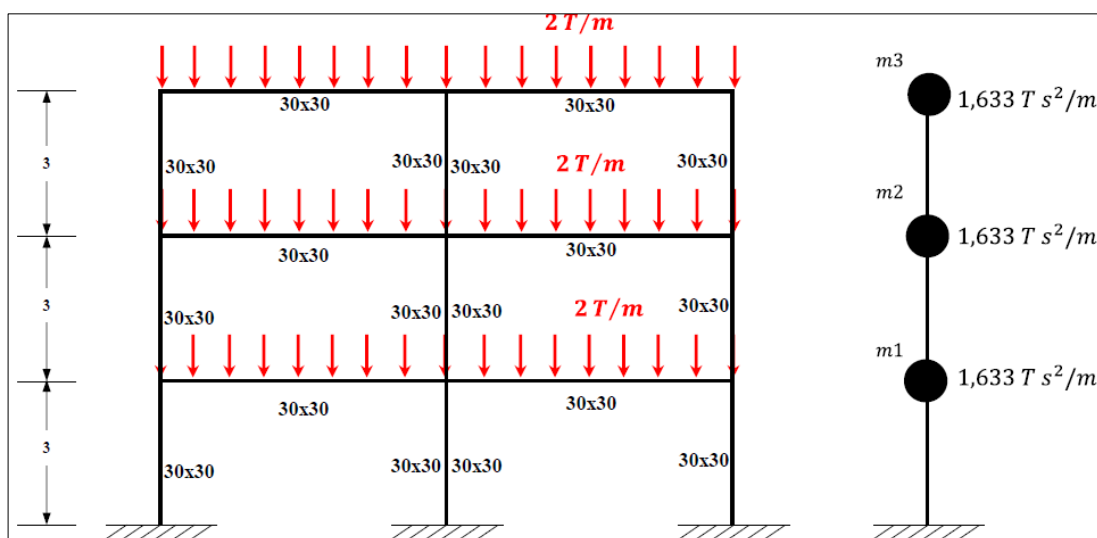
Para poder validar los resultados obtenidos, utilizaremos los métodos desarrollados para solucionar un problema planteado en el libro de “Dinámica de estructuras con CEINCI-LAB” del Dr. Roberto Aguiar Falconí en su segunda edición, el autor presenta el siguiente problema para un pórtico de tres pisos.

El Ejemplo N°6 que se encuentra en la pág. 305 es el siguiente:

Encontrar la respuesta en el tiempo, del tercer piso, de la estructura indicada en la Figura 24, ante sismo de Perú del 9 de noviembre de 1974. Las unidades con las cuales se obtuvieron las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento son T. y m.

Figura 24

Modelo de cálculo de un pórtico plano para el análisis sísmico



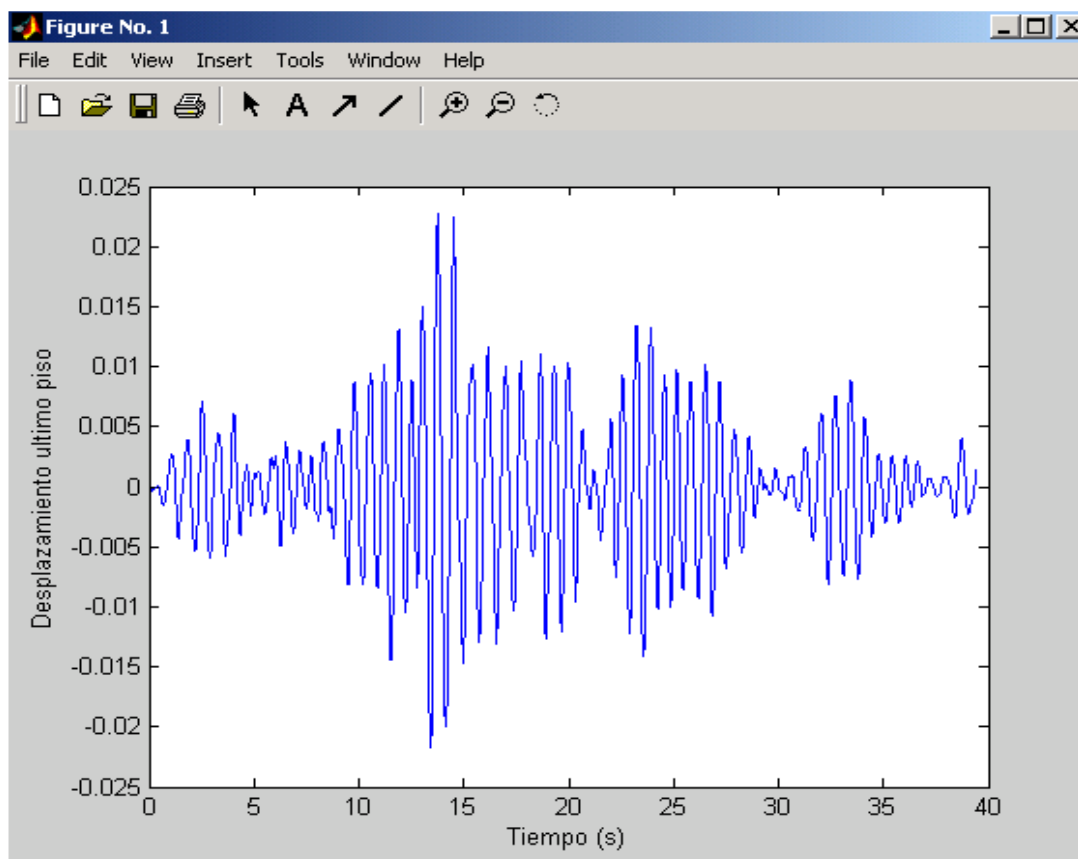
$$[M] = \begin{bmatrix} 1,633 & 0 & 0 \\ 0 & 1,633 & 0 \\ 0 & 0 & 1,633 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2761,1 & -1538,1 & 285,7 \\ -1538,1 & 2278,0 & -1080,6 \\ 285,7 & -1080,6 & 836,9 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 6,3608 & -2,1516 & 0,0124 \\ -2,1516 & 5,3010 & -2,1143 \\ 0,0124 & -2,1143 & 3,0325 \end{bmatrix}$$

La respuesta que encuentra el autor se muestra en la Figura 25.

Figura 25

Desplazamiento del tercer piso solución del autor



Nota. Los valores de desplazamiento son valores discretos a lo largo del tiempo, el autor utiliza el método de Newmark.

Mostramos el resultado aplicando los métodos numéricos desarrollados en esta tesis, para poder comparar utilizamos también el método de Newmark, tal como se muestra en la Tabla 12 y la Figura 26 para valores máximos.

Tabla 12

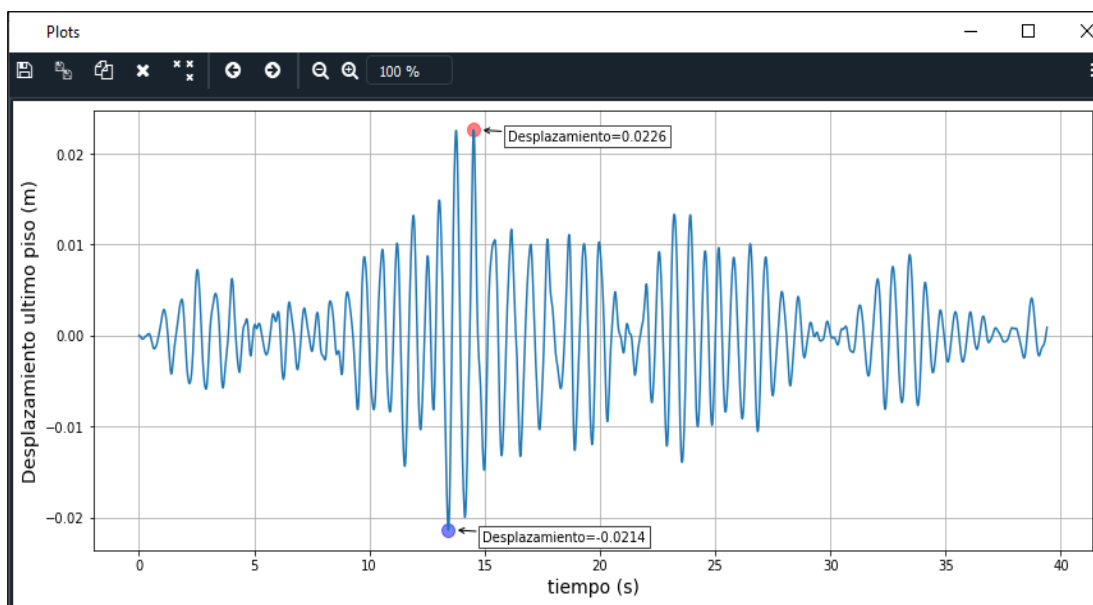
Aceleraciones, desplazamientos y velocidades máximas

Número de piso	Aceleración (m/s ²)	Desplazamiento (m)	Velocidad (m/s)
1	-1,4706	0,0073	0,0738
2	-2,4186	0,0164	0,1529
3	-3,0799	0,0226	0,2104

Nota. Esta tabla nos muestra los valores máximos calculados usando el método de Newmark de cada piso usando $\alpha=1/6$ y $\beta=1/2$

Figura 26

Desplazamiento en el tiempo del piso 3 con $\alpha=1/6$ y $\beta=1/2$



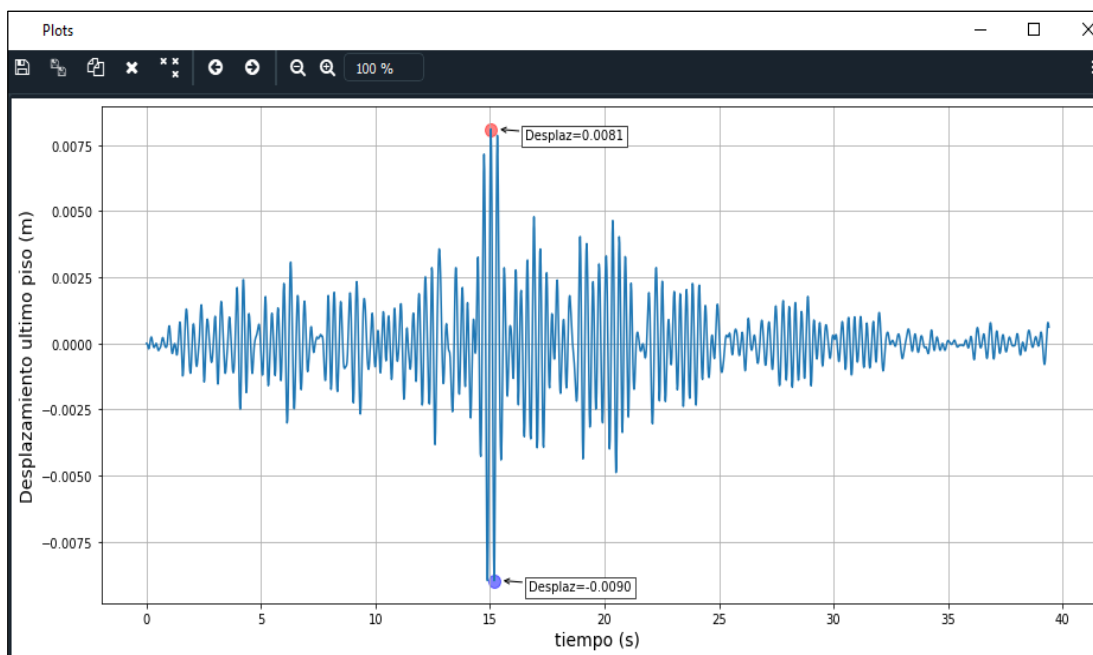
Nota. Los valores de desplazamiento son valores discretos a lo largo del tiempo, utilizamos el método de Newmark.

Aplicación en nuestro modelo:

Ahora que validamos los métodos para obtener la respuesta dinámica en el tiempo, lo aplicaremos para obtener la respuesta sobre nuestro modelo de dos pisos tal como se muestra en la Figura 27 y la Tabla 13 para valores máximos.

Figura 27

Desplazamiento del segundo piso método de Newmark



Nota. la gráfica muestra los valores de desplazamiento para nuestro modelo en estudio, calculados utilizando el método de Newmark son valores discretos a lo largo del tiempo.

Tabla 13

Aceleraciones, desplazamientos y velocidades máximas Newmark

Número de piso	Aceleración (m/s ²)	Desplazamiento (m)	Velocidad (m/s)
1	2,1382	-0,0040	-0,0830
2	4,7972	-0,0090	0,1921

Nota. Esta tabla nos muestra los valores máximos calculados usando el método de Newmark de cada piso usando $\alpha=1/8$ y $\beta=1/2$

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN

La primera hipótesis específica indica que: Los métodos numéricos de integración directa son eficaces para determinar la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad. Entonces se puede decir que:

Los resultados del análisis de errores muestran que los métodos numéricos son eficaces para determinar la respuesta dinámica de estructuras, dado que las desviaciones estándar para varios intervalos de tiempo están dentro de lo aceptable. De todos los métodos numéricos evaluados, el que presentó valores con un error menor y por ende presentando mayor eficacia fue el método de Newmark.

Los resultados brindados en el artículo presentado por Vásconez et al, en su trabajo titulado “Análisis de respuesta elástica en el tiempo aplicando el método de Newmark y el método de Wilson” los resultados obtenidos guardan relación con los resultados obtenidos en la presente tesis, en nuestro caso utilizamos los parámetros del método de Newmark $\beta = 0,5$ y $\alpha = 0,125$.

Los métodos de diferencia central y Houbolt, no presentan parámetros que modifiquen su comportamiento.

La segunda hipótesis específica indica que: Se pueden idealizar las estructuras reales con modelos matemáticos, utilizando matrices de masas, rigideces y amortiguamiento. Entonces se puede decir que:

Realizado el modelo matemático de la estructura en estudio, cabe resaltar que está condicionado a unos parámetros específicos directamente relacionado al problema estudiado, el rango elástico, nudos y pisos rígidos, vigas axialmente rígidas, modelo de masas concentradas.

CONCLUSIONES

Luego de Evaluar los diferentes métodos numéricos propios de la dinámica estructural, el método más eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras para un pórtico de varios grados de libertad resulto ser el método de Newmark, siendo el que presento un valor de error más cercano al cero y una dispersión de los mismos en un rango acotado según lo muestra los valores de su desviación estándar para diferentes deltas de tiempo como se muestra en la Figura 23.

Los métodos numéricos de integración directa propios de la dinámica estructural, son eficaces para determinar la respuesta dinámica para estructuras de varios grados de libertad.

Todos los métodos numéricos tuvieron un comportamiento aceptable para un incremento de tiempo de 0,022 segundos, siendo el menos preciso el método de Houbolt con una desviación estándar de error de 0,00501, seguido muy de cerca por el método de Wilson con una desviación estándar de error de 0,00315. los métodos que presentaron mayor eficacia fueron los métodos de Diferencia central y el método de Newmark, con una desviación estándar de error de 0,00114 y 0,00054 respectivamente. Cabe mencionar que el método de diferencia central fue el que es más sensible al incremento de tiempo, tal como se muestra en la Figura 23, es inestable para deltas de tiempo mayores a 0,023.

La respuesta dinámica en el tiempo muestra más información de la necesaria, ya que en la mayoría de los casos solo es necesario conocer los valores máximos de desplazamiento velocidades y aceleraciones, pero puede ser muy útil para realizar un estudio más detallado del daño en estructuras, ya que tenemos información temporal.

RECOMENDACIONES

Se recomienda a futuros investigadores o tesisistas la implementación de estos algoritmos de métodos numéricos para obtener la respuesta de estructuras en el rango inelástico.

Se recomienda también hacer un análisis más exhaustivo de la sensibilidad de los métodos con respecto al incremento del tiempo, siendo que este varía con respecto a las variables de rigidez y masa de una estructura a otra.

Se recomienda a futuros investigadores puedan realizar una comparación con algún software del mercado que sirva para el análisis sísmico de estructuras realizando una comparación más exhaustiva.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cacho-Pérez, M., Frechilla, N., y Lorenzana, A. (2017). Estimación de las masas modales de una estructura en servicio mediante transformación en el espacio de estados. *Revista Internacional de Metodos Numericos Para Calculo y Diseno En Ingenieria*, 33(1–2), 123–128. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2016.02.002>
- Castro Medina, J. C., López Almansa, F., y Oller, S. (2014). Modelización numérica del comportamiento estructural cíclico de barras esbeltas de acero con pandeo restringido. *Revista Internacional de Metodos Numericos Para Calculo y Diseno En Ingenieria*, 30(4), 229–237. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2013.07.008>
- Chopra, A. K. (2014). *Dinámica de estructuras* (Cuarta edi).
- Goicolea Ruigomez, J. M. (2010). *CURSO DE MECÁNICA (Volumen I)*. <http://w3.mecanica.upm.es/~goico/mecanica/libro/>
- Hernández Sampieri, R.; Fernández C., C; Baptista L., M. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 148).
- Hilarión, F. L. N., y Segreña, D. L. L. (2014). Programa Didáctico a Código Abierto De Análisis Dinámico De Estructuras Undin 1.0. *Revista Educación En Ingeniería*, 9(17), 118–131. <https://educacioneningeneria.org/index.php/edi/article/view/342#.Ylcdqf7ObRM.mendeley>
- López-Almansa, F., y Oller, S. (2014). Resolución numérica de las ecuaciones del movimiento de edificios de varias plantas con no linealidades severas. *Revista Internacional de Metodos Numericos Para Calculo y Diseno En Ingenieria*, 30(3), 194–202. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2013.06.007>
- PAZ, M. (1992). *Dinámica Estructural* (p. 648).
- RAO, S. S. (2012). Vibraciones mecánicas. In *Mecánica para ingenieros: cinemática* (pp. 209–242). Pontificia Universidad Javeriana. <http://www.jstor.org/stable/10.2307/j.ctv893k5p.9>
- Trejo Molina, F. de J. (2007). *Análisis comparativo de métodos numéricos en integración directa para evaluar la respuesta dinámica de estructuras*. 48–55.
- Vásconez, E., Aguiar, R., y Aref, A. (2016). ANALYSIS OF FLEXIBLE ANSWER IN THE TIME APPLYING THE METHOD OF NEWMARK AND THE METHOD OF WILSON. *CIENCIA*, 18, 281–304.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA					
Título:	"ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OBTENER LA RESPUESTA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS, TACNA 2021"				
Autor:	Bach. Fernando, HUANCAPAZA ZEA				
Planteamiento del Problema	Objetivos	Hipótesis	Variables	Indicadores	Metodología
Problema General	Objetivo General	Hipótesis General	Independiente	a) Masa concentrada b) Rigidez c) Amortiguamiento	Tipo de investigación - Cuantitativa Nivel de investigación - Explicativo, Demostrativo Ámbito de estudio - Matemática: métodos numéricos
Que métodos numérico es el mas eficaz para determinar la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad	Determinar el método numérico mas eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad	Evaluando los diferentes métodos numéricos, se obtiene el método mas eficaz para obtener la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad.	V1: Métodos Numéricos		
Problemas Específicos	Objetivos Específicos	Hipótesis Específicas	Dependiente	a) Error b) Desplazamientos c) Velocidad d) Aceleraciones	Población - Métodos Numéricos Muestra - Método de Diferencia Finita - Metodo de Diferencia Central - Método de Runge Kutta - Método de Newmark - Método de Wilson - Método de Houbolt Técnicas - Observación directa de modelos matemáticos - Revisiones bibliográficas sobre métodos numéricos Instrumentos - fichas de recolección de datos - tablas y graficas - PYTHON
a) ¿Cuales son los métodos numéricos propios de la dinámica estructural?	a) Identificar los métodos numéricos mas eficaces para obtener respuesta dinámica	a) Los métodos numéricos de integración directa son eficaces para determinar la respuesta dinámica de estructuras	V2: Respuesta Dinámica de estructuras		
b) ¿Como se idealiza modelos matemáticos de estructuras reales, para realizar un análisis dinámico?	b) Idealizar estructuras reales en modelos matemáticos para su evaluación dinámica	b) Se pueden idealizar las estructuras reales con modelos matemáticos, utilizando matrices de masas, rigideces y amortiguamiento.			
c) ¿Cual es la respuesta dinámica de modelos idealizados de estructuras de varios grados de libertad?	c) Obtener la respuesta dinámica de modelos idealizados de estructuras de varios grados de libertad	c) La respuesta dinámica se obtiene idealizando estructuras de varios grados de libertad y aplicando métodos numéricos			